Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Académico Profesional de Matemática

Correspondencia de Serre entre haces coherentes y módulos graduados de tipo casi finito

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Joe Albino PALACIOS BALDEÓN

ASESOR

Mario Enrique SANTIAGO SALDAÑA

Lima, Perú

2016

Referencia bibliográfica

Palacios, J. (2016). *Correspondencia de Serre entre haces coherentes y módulos graduados de tipo casi finito*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Académico Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

436

11(P)

136

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA)
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Ciudad Universitaria - Av. Venezuela S/N cuadra 34
Teléfono IP Nº 619-7000
Correo Postal: 05-0021, E-mail: eapmat@unmsm.edu.pe
Lima - Perú

Escuela Académico-Profesional de Matemática

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 3:00 P.M. horas del día miércoles 20 de julio 2016, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Calificador de Tesis: Mg. Alex Molina Sotomayor (Presidente), Lic. Marco Antonio Rubio Gallarday (Miembro), Mg. Mario Enrique Santiago Saldaña (Miembro Asesor), para la sustentación de la tesis titulada: «CORRESPONDENCIA DE SERRE ENTRE HACES COHERENTES Y MÓDULOS GRADUADOS DE TIPO CASI FINITO», presentado por el señor Bachiller JOE ALBINO PALACIOS BALDEÓN, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición del tesista, el Presidente del Jurado invitó a dar respuestas a las preguntas que le formulen.

Hecha la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado, el tesista mereció la aprobación unánime obteniendo como calificativo promedio la nota de:

DIECINUEVE ....(19). (Sobresaliente con mención)

A continuación el Presidente del Jurado, Mg. Alex Molina Sotomayor, manifestó que el señor Bachiller JOE ALBINO PALACIOS BALDEÓN, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 4:15 P.M. horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.

MG. ALEX MOLINA SOTOMAYOR
PRESIDENTE

MG. MARIO ENRIQUE SANTIAGO SALDAÑA
MIEMBRO ASESOR

LIC. MARCO ANTONIO RUBIO GALLARDAY
MIEMBRO

Correspondencia de Serre entre Haces Coherentes y Módulos Graduados de Tipo Casi Finito

Joe Palacios Baldeón

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas, de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos para la obtención del Título profesional de Licenciado en Matemática.

Aprobada por:

Mg. Alex Molina Sotomayor, UNMSM
Presidente

Mg. Mario Santiago Saldaña, UNMSM
Miembro Asesor

Lic. Marco Rubio Gallarday, UNMSM
Miembro

Cuidad Universitaria - Pabellón de Ciencias Matemáticas
Teléfono IP N° 619-7000 Anexo 1610 – Telefax 619-7000 Anexo 1609, 1618
Av. Venezuela s/n, Lima - Perú

Agosto - 2016

FICHA CATALOGRÁFICA

JOE ALBINO PALACIOS BALDEÓN

Correspondencia de Serre entre Haces Coherentes y Módulos Graduados de Tipo Casi Finito, (Lima) 2016.

xi, 136 p., 29,7 cm, (UNMSM, Licenciado, Matemática, 2016).

Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas.
Matemática.
I. UNMSM/ F de CM.
II. Correspondencia de Serre entre Haces Coherentes y Módulos Graduados de Tipo Casi Finito (álgebra conmutativa, geometría algebraica, topología)

A mis padres: Sabino y Rosa

Agradecimientos

Agradezco al Profesor Mario Santiago Saldaña por haberme iniciado en el área del álgebra en los cursos de estructuras algebraicas y seminarios. Asimismo agradezco a los Profesores Alex Molina y Marco Rubio por haber aceptado ser miembros del jurado de esta tesis. Agradezco al Dr. Fernando Cukierman, Profesor de la Universidad de Buenos Aires, por haberme propuesto el tema del presente trabajo, por sus valiosas sugerencias, y por sus palabras de aliento y de motivación. Tengo que agradecer al Profesor Lord Barrera por haberme dado la iniciativa de iniciar este proyecto de tesis, por su estusiasmo contagiante y por su importante colaboración en la ejecución de este trabajo. Agradezco a mi compañero Gabriel Muñoz por haber compartido conmigo varios años de estudio en los cursos universitarios y en el proyecto de tesis. Agradezco de manera especial a mis padres y familiares que me han ayudado moral y económicamente, sus apoyos han importantes en la realización de esta tesis. Acabo agradeciendo a mis amigos, entre entre ellos a Napoleón Caro y Leyter Potenciano; a mis compañeros, profesores y autoridades de mi facultad; y a amigos de la facultad de matemáticas de la UNI, que de una y otra forma han aportado en la realización de este trabajo. Este trabajo fué culminado en el año 2009.

Joe Palacios Baldeón

Lima, 2016

Resumen

CORRESPONDENCIA DE SERRE ENTRE HACES COHERENTES Y MÓDULOS GRADUADOS DE TIPO CASI FINITO

JOE ALBINO PALACIOS BALDEÓN

Agosto-2016

Orientador: Mg. Mario Santiago Saldaña.
Título obtenido: Licenciado en Matemática.

....

La presente monografía corresponde al área de geometría algebraica. Trataremos sobre una introducción a la teoría de haces y esquemas. El objectivo principal es desarrollar detalladamente un teorema de J.-P. Serre que establece la correspondencia entre haces coherentes sobre esquemas proyectivos y módulos graduados de tipo casi finito.

....

PALABRAS CLAVES: Anillos conmutativos, módulos graduados, haces, esquemas, cohomología.

Abstract

CORRESPONDENCE OF SERRE BETWEEN COHERENT SHEAVES AND GRADED MODULES OF QUASI FINITE TYPE

JOE ALBINO PALACIOS BALDEÓN

August-2016

Supervisor: Mg. Mario Santiago Saldaña.
Title: Licentiate in Mathematics.

....

This monograph corresponds to the area of algebraic geometry. We shall deal with an introduction to the theory of sheaves and schemes. Our main objective is to develop in detail a theorem of J.-P. Serre that establishes the correspondence between coherent sheaves on projective schemes and graded modules of quasi-finite type.

....

KEYWORDS: Commutative rings, graded modules, sheaves, schemes, cohomology.

Índice

Capítulo 1

Introducción

La presente monografía corresponde al área de geometría algebraica y los temas desarrollados aquí son de caracter elemental. Está dirigido a estudiantes que están iniciandose en el estudio de los rudimentos de la geometría algebraica, a saber la teoría de haces y esquemas. En este trabajo vamos a desarrollar un teorema de Serre que en el libro de Hartshorne [6], aparece como ejercicio (5.9) del capítulo II.

Además, usando métodos cohomológicos, daremos una generalización de este teorema de Serre. Asimismo hemos redactado la solución de otros ejercicios de [6] que han sido necesarios para la solución del ejercicio principal, los cuales son presentadas por medio de proposiciones y teoremas.

Nuestra intención ha sido redactar las demostraciones de las proposiciones con mayor detalle posible (principalmente las secciones 1,2 y 5 del capítulo II de [6]), de manera que pueda ayudar al estudiante que desea ver una exposición mas explicita de las demostraciones dadas en los primeros capítulos de textos clásicos de geometría algebraica; sin embargo en el capítulo 4 nuestra exposición es ligera, algunas demostraciones no han sido incluidas, ya que sólo usaremos los resultados principales para dar la generalización del ejercicio mencionado.

Los prerrequisitos para la lectura de este trabajo, es haber llevado un curso elemental de álgebra conmutativa, topología general y análisis. De topología y análisis, sólo se requiere conceptos básicos, mientras que de álgebra conmutativa, se requiere que se conozca por lo menos temas básicos como: las propiedades fundamentales de anillos y operaciones con ideales; los conceptos de localización, producto tensorial, sucesiones exactas, límite proyectivo e inductivo de anillos y módulos; finalmente las propiedades de anillos y módulos noetherianos; expuestos por ejemplo en Atiyah-Macdonald [1] y Matsumura [9].

La "correspondencia de Serre entre haces coherentes y módulos graduados de tipo casi finito" que vamos a establecer en este trabajo, consiste en lo siguiente:

Sea k un cuerpo, S un anillo graduado finitamente generado por S_1 como S_0-álgebra, donde S_0 es un k-álgebra finitamente generado, y sea $X = \operatorname{Proj} S$. Diremos que un S-módulo graduado M es de tipo casi finito, si a partir de cierto grado este módulo es finitamente generado. Si denotamos por $\mathbf{Modgrcf}(S)$ a la categoría de S-módulos graduados de tipo casi finito y por $\mathfrak{Coh}(X)$ a la categoría de $\mathcal{O}_X$-módulos coherentes sobre X; tendremos dos funtores covariantes, un funtor $M \mapsto \widetilde{M}$ de $\mathbf{Modgrcf}(S)$ en $\mathfrak{Coh}(X)$ y un funtor $\mathcal{F} \mapsto \Gamma_*(\mathcal{F})$ de $\mathfrak{Coh}(X)$ en $\mathbf{Modgrcf}(S)$. Si M es un S-módulo graduado de tipo casi finito, existe un homomorfismo graduado $\alpha_M \colon M \to \Gamma_*(\widetilde{M})$ que es un casi isomorfismo (esto es, a partir de cierto grado las componentes de α_M son biyectivas); y si $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo coherente, existe un isomorfismo de haces $\beta_{\mathcal{F}}\colon \Gamma_*(\mathcal{F})^{\sim} \to \mathcal{F}$. Ademas, α_M y $\beta_{\mathcal{F}}$ son funtoriales en M y $\mathcal{F}$ respectivamente, pero resulta que los funtores $^{\sim}$ y Γ_* no establecen una equivalencia de categoría entre las categorías mencionadas, ya que no se tiene en general que α_M es un isomorfismo. Sin embargo, si definimos una relación de equivalencia $\approx$ en $\mathbf{Modgrcf}(S)$, diciendo que $M \approx M'$ si los módulos M y M' son isomorfos partir de un cierto grado, y si consideramos la relación de isomorfismo $\cong$ en $\mathfrak{Coh}(X)$; se cumple que $M \approx M'$ implica $\widetilde{M} \cong \widetilde{M'}$; por tanto $^{\sim}$ induce un funtor $[M] \mapsto [\widetilde{M}]$ de $\mathbf{Modgrcf}(S)/\approx$ en $\mathfrak{Coh}(X)/\cong$. Este funtor es plenamente fiel y esencialmente sobreyectiva, luego una equivalencia de categorías. En este sentido tenemos esta "correspondencia de Serre entre haces coherentes y módulos graduados de tipo casi finito" (esta prueba está dada en el Teorema 4.4.32). Un resultado crucial para establecer este resultado es el teorema de "Finitud de la Clausura Integral" (Teor. 2.2.16), usando este teorema resulta que $\Gamma_*(\mathcal{F})$ es de tipo casi finito y α_M es un casi isomorfismo.

La generalización del resultado anterior que vamos a dar después, consiste en probar el mismo resultado pero con una condición más débil sobre el anillo S_0, reemplazaremos la condición de k-álgebra finitamente generado por anillo noetheriano finitamente generado. Para dar esta generalización, usaremos el teorema de "Vanishing de Serre" (Teor. 5.2.3), con ello probaremos que $\Gamma_*(\mathcal{F})$ es de tipo casi finito y α_M es un casi isomorfismo.

La "Correspondencia de Serre" mencionada inicialmente es un resultado reformulado, en el lenguaje de los esquemas, de un resultado que se encuentra en el artículo de J.-P. Serre, "Faisceaux Algébriques Cohérents" (FAC), que está basado en el contexto de las variedades algebraicas de tipo finito sobre un cuerpo algebraicamente cerrado.

Todo esto comenzó cuando Jean Leray, en los inicios de la segunda guerra mundial, introdujo el concepto de haz. En ese tiempo Leray estaba interesado en problemas relacionados con topología algebraica y ecuaciones diferenciales parciales. Poco tiempo después, Leray tuvo algunas conversaciones con Henry Cartan, esto llevó a que el concepto de haz fuera reformulado y presentado en el Seminario Cartan (1948-1951) realizado en l'Ecole Normale Supérieure (Francia), en esos años es cuando la teoría de haces comienza con la teoría de las funciones de varias variables complejas. Luego J.-P. Serre observó que la teoría de haces y los métodos cohomológicos también podían aplicarse en la geometría algebraica clásica. En el año 1955, J.-P. Serre publicó en "The Annals of Mathematics", su artículo FAC. Este artículo está dividido en 3 capítulos: el capítulo I está referido a los haces coherentes y a la cohomología de haces; en el capitulo II, Serre define las variedades algebraicas como un espacio anillado, luego establece una correspondencia entre haces de módulos sobre una variedad afín y módulos finitamente generados; finalmente el capítulo III lo dedica a los haces de módulos sobre la variedad proyectiva $\mathbf{P}^r_K$, donde K es un cuerpo algebraicamente cerrado; en este capítulo él prueba que si $S = K[t_o, \ldots, t_r]$ y $X = \mathbf{P}^r_K$ entonces existe una correspondencia entre haces coherentes sobre X y módulos graduados sobre S que verifica la condición (TF) (al cual nosotros llamamos módulos de tipo casi finito), de forma semejante a la correspondencia que vamos a presentar en el contexto de esquemas; él acaba este capítulo dando algunas relaciones con los funtores Ext^q_S y algunas aplicaciones como la función característica y género aritmético sobre una variedad proyectiva.

Posteriormente A. Grothendieck creó un nuevo tipo de 'variedad' mas amplia, al cual llamó esquema, generando una revolución en la geometría algebraica, muchos resultados de la geometría algebraica desarrollados hasta ese momento (dentro de los cuales los resultados del FAC de Serre) fueron reformulados y generalizados en este nuevo lenguaje. A partir de los años 1960, Grothendieck con la colaboración de Jean Dieudonné, comenzaron a publicar los "Élements de Géometrie Algébrique"(EGA), para el "Institut des Hautes Études Scientifiques"(IHES). Pocos años despues, se presentó la dificultad en la difusión de esta renovada geometría algebraica, debido a la gran cantidad de información de los EGA's, por lo cual muchos matemáticos como R. Hartshorne (quien estudió con J.-P Serre y Grothendieck), escribieron textos de geometría algebraica basados en los voluminosos EGA's (entre ellos Hartshorne [6]), con el fin de que pueda ser usado como un libro de introducción de la geometría algebraica moderna. Como es natural, muchas demostraciones son expuestas de manera resumidas. Nosotros por el contrario hemos querido exponer con un poco mas de detalle, sobre todo de las secciones 1,2 y 5 del capítulo II de [6].

A continuación resaltamos algunos temas principales de los capítulos desarrollados en este trabajo:

El **Capítulo 1**, es la parte preliminar de este trabajo, luego introduciremos brevemente algunos conceptos básicos de la teoría de categorías, luego introduciremos de manera breve las propiedades de anillos y módulos graduados. En este capítulo introduciremos el concepto de módulo de tipo casi finito (que es la condición (TF) llamada por Serre). A continuación daremos un repaso de las propiedades topológicas del espectro de un anillo, y finalmente trataremos brevemente sobre las variedades algebraicas: afines y proyectivas.

El **Capítulo 2**, es dedicado a la teoría de haces y esquemas. Aquí trataremos sobre la conexión entre variedades y esquemas mediante un funtor $t\colon \mathfrak{Var}(k) \to \mathfrak{Sch}(k)$; luego daremos algunas propiedades de los subesquemas cerrados.

El **Capítulo 3**, es dedicado a los haces de módulos sobre un esquema. Aquí desarrollaremos algunas propiedades de un haz casi coherente y coherente sobre un esquema afín, luego establecemos la "correspondencia afín de Serre" entre haces coherentes sobre un esquema afín y módulos finitamente generados sobre un anillo noetheriano. Finalmente, de modo paralelo, desarrollaremos las propiedades de haces coherente sobre un esquema proyectivo, luego estableceremos la "correspondencia proyectiva de Serre" entre haces coherentes sobre un esquema proyectivo y módulos graduados de tipo casi finito finitamente sobre un anillo graduado de la forma $S = S_0[S_1]$ donde S_0 es un k-álgebra de tipo finito.

El **Capítulo 4**, contiene algunos aspectos de la cohomología de haces coherentes. Aquí daremos la generalización de la "correspondencia de Serre", en donde requeriremos que S_0 sea un anillo noetheriano en lugar de k-álgebra de tipo finito. Finalmente, en los comentarios finales trataremos brevemente sobre la característica de Euler y polinomio de Hilbert de un haz coherente sobre un esquema proyectivo, para dar la definición de genero aritmético de un esquema proyectivo.

Capítulo 2

Preliminares

En todo el trabajo supondremos que el lector está familiarizado con temas básicos de álgebra, topología y análisis; sin embargo detallaremos algunos conceptos que serán utilizados continuamente.

2.1 Categorías y Funtores

El concepto de categoría fué introducida por Eilenberg y MacLane en los años 40. Esta noción fué creada con el propósito de unificar, sistematizar y simplificar sistemas matemáticos que surgieron hasta aquella época, como son la clase de grupos, anillos, espacios topológicos, variedades diferenciables, etc. A continuación damos su definición:

Definición 2.1.1. Una *categoría* $\mathcal{C}$ consiste de lo siguiente:

(1) una clase $\mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ cuyos elementos son llamados *objetos* de $\mathcal{C}$,

(2) para cada par $A, B \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$, un conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ cuyos elementos son llamados *morfismos* de A en B,

(3) para todo $A, B, C \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$, una aplicación

$$\circ\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,C)\,, \qquad (f,g) \mapsto g \circ f\,,$$

llamada *composición de morfismos*, satisfaciendo las siguientes propiedades:

(i) la composición de morfismos es asociativa,

(ii) para cada $A \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$, existe $id_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ tal que para todo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ y $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$, se tiene $f \circ id_A = f$ y $id_A \circ g = g$.

Denotaremos por $f\colon A \to B$ o por $A \xrightarrow{f} B$ a un morfismo f de A en B.

Ejemplo 2.1.1. La categoría $\mathbf{Ab}$, donde los objetos son los grupos abelianos, los morfismos son los homomorfismos de grupos, y la composición de morfismos es la composición usual de aplicaciones.

Ejemplo 2.1.2. La categoría $\mathbf{Mod}(A)$ de los módulos sobre un anillo conmutativo A, donde los objetos son los A-módulos, los morfismos son los homomorfismos de A-módulos, y la composición de morfismos es la composición usual de aplicaciones.

Ejemplo 2.1.3. La categoría $\mathfrak{Top}$, donde los objetos son los espacios topológicos, los morfismos son las aplicaciones continuas, y la composición de morfismos es la composición usual.

Ejemplo 2.1.4. La categoría $\mathfrak{Var}(k)$ de los variedades algebraicas sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k .

Ejemplo 2.1.5. La categoría $\mathfrak{Prehac}(X)$ (resp. $\mathfrak{Hac}(X)$) de prehaces (resp. haces) de grupos abelianos sobre un espacio topológico X (ver definición 3.1.5).

Ejemplo 2.1.6. La categoría $\mathfrak{Sch}(S)$ de esquemas sobre un esquema S (ver definición 3.3.1).

Definición 2.1.2. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Un morfismo $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ es un *monomorfismo*, si para todo $C \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ y para todo par de morfismos $\alpha, \beta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A)$, la igualdad $\varphi \circ \alpha = \varphi \circ \beta$ implica $\alpha = \beta$. Un morfismo $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ es un *epimorfismo*, si para todo $C \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ y para todo par de morfismos $\alpha, \beta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$, la igualdad $\alpha \circ \psi = \beta \circ \psi$ implica $\alpha = \beta$.

Un morfismo $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ se llama *isomorfismo* si existe un morfismo $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ tal que $\psi \circ \varphi = id_A$ y $\varphi \circ \psi = id_B$. Se dice que A y B son *isomorfos* si existe un isomorfismo $A \to B$, en este caso escribimos $A \cong B$.

Definición 2.1.3. Un objeto I de una categoría $\mathcal{C}$ es llamado *inyectivo* si dado un monomorfismo $\imath \colon A \to B$ y un morfismo $\alpha \colon A \to I$, existe un morfismo $\beta \colon B \to I$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\imath"] \arrow[dr, "\alpha"'] & B \arrow[d, dashed, "\beta"] \\
 & & I
\end{tikzcd}$$

Diremos que una categoría $\mathcal{C}$ tiene *suficientes inyectivos* si para todo $A \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$, existe un monomorfismo $A \to I$, donde I es un objeto inyectivo.

Definición 2.1.4. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ dos categorías. Un *funtor covariante* $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ consiste de una correspondencia $F \colon \mathbf{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathbf{Ob}(\mathcal{C}')$ y de aplicaciones

$$F \colon \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(F(A), F(B))$$

para todo par de objetos A, B de $\mathcal{C}$ satisfaciendo las siguientes propiedades:

(1) $F(id_A) = id_{F(A)}$ para todo $A \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$.

(2) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ para todo par de morfismos $f \colon A \to B$ y $g \colon B \to C$.

La definición de *funtor contravariante* $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ es completamente similar, variando únicamente la siguiente condición:

(2') $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ para todo $f \colon A \to B$ y $g \colon B \to C$.

Cada vez que mencionemos solamente el término *funtor*, entenderemos que se trata de un funtor covariante.

Sean $\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{C}''$ tres categorías y sean $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$, $G\colon \mathcal{C}' \to \mathcal{C}''$ dos funtores. La *composición* de F con G es el funtor $G \circ F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}''$ definido por $(G \circ F)(A) := G(F(A))$ para todo objeto A de $\mathcal{C}$, y $(G \circ F)(f) := G(F(f))$ para todo morfismo f en $\mathcal{C}$. Un funtor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ se llama *funtor identidad* de $\mathcal{C}$ si $F(A) = A$ para todo objeto A de $\mathcal{C}$ y $F(f) = f$ para todo morfismo f en $\mathcal{C}$, este funtor es denotado por $id_{\mathcal{C}}$. Un funtor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ es un *isomorfismo de categorías* si existe un funtor $G\colon \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ tal que $G \circ F = id_{\mathcal{C}}$ y $F \circ G = id_{\mathcal{C}'}$.

Ejemplo 2.1.7. Para cualquier módulo M sobre un anillo conmutativo A, tenemos un funtor covariante $\mathrm{Hom}_A(M, \cdot)\colon \mathbf{Mod}(A) \to \mathbf{Mod}(A)$, donde cada A-módulo K asocia el A-módulo $\mathrm{Hom}_A(M, K)$ y un homomofismo de A-módulos $f\colon K \to L$, asocia el homomorfismo de A-módulos

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_A(M, f)\colon\ \mathrm{Hom}_A(M, K) &\to \mathrm{Hom}_A(M, L) \\ (M \xrightarrow{g} K) &\mapsto (M \xrightarrow{g} K \xrightarrow{f} L)\,. \end{aligned}$$

Similarmente, tenemos un funtor contravariante $\mathrm{Hom}_A(\cdot, N)\colon \mathbf{Mod}(A) \to \mathbf{Mod}(A)$, donde cada A-módulo K asocia el A-módulo $\mathrm{Hom}_A(K, N)$ y un homomorfismo de A-módulos $f\colon K \to L$, asocia el homomorfismo de A-módulos

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_A(f, N)\colon\ \mathrm{Hom}_A(L, N) &\to \mathrm{Hom}_A(K, N) \\ (L \xrightarrow{g} N) &\mapsto (K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} N)\,. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.1.8. El funtor covariante $t\colon \mathfrak{Var}(k) \to \mathfrak{Sch}(k)$ de la categoría de las variedades algebraicas sobre k a la categoría de los esquemas sobre k (ver Proposición 3.3.5).

Definición 2.1.5. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ dos categorías y F, G dos funtores de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$. Un *morfismo de funtores* o simplemente un *morfismo* $\Phi\colon F \to G$ consiste de morfismos $\Phi(A)\colon F(A) \to G(A)$ para todo objeto A de $\mathcal{C}$, tal que para todo morfismo $f\colon A \to B$, el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\Phi(A)"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\Phi(B)"] & G(B) \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Es decir, $G(f) \circ \Phi(A) = \Phi(B) \circ F(f)$. Sean F, G, H tres funtores de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$, Φ un morfismo de F en G, Ψ un morfismo de G en H. La *composición* de Φ con Ψ es el morfismo $\Psi \circ \Phi\colon F \to H$ definido por $(\Psi \circ \Phi)(A) := \Psi(A) \circ \Phi(A)$ para todo objeto A de $\mathcal{C}$. Un morfismo $\Phi\colon F \to F$ se llama *morfismo identidad* de F si $\Phi(A) = id_{F(A)}$ para objeto A de $\mathcal{C}$, este es denotado por id_F. Un morfismo $\Phi\colon F \to G$ es llamado *isomorfismo* si existe un morfismo $\Psi\colon G \to F$ tal que $\Psi \circ \Phi = id_F$ y $\Phi \circ \Psi = id_G$, equivalentemente, Φ es un isomorfismo si $\Phi(A)$ es un isomorfismo para todo objeto A de $\mathcal{C}$. Si $\Phi\colon F \to G$ es un isomorfismo, denotamos por $F \xrightarrow{\sim} G$ para indicar que F y G son isomorfos.

Definición 2.1.6. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ dos categorías. Un funtor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ es una *equivalencia de categorías* si existe un funtor $G\colon \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ tal que $G \circ F \xrightarrow{\sim} id_{\mathcal{C}}$ y $F \circ G \xrightarrow{\sim} id_{\mathcal{C}'}$. En este caso diremos que $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ son *categorías equivalentes*.

Definición 2.1.7. Sea $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un funtor.

(1) Diremos que F es *fiel* (resp. *pleno*, *plenamente fiel*) si para todo par de objetos A, B de $\mathcal{C}$, la aplicación $F\colon \mathrm{Hom}(A,B) \to \mathrm{Hom}(F(A), F(B))$ es inyectiva (resp. sobreyectiva, biyectiva).

(2) Diremos que F es *esencialmente sobreyectiva* si para cada objeto A' de $\mathcal{C}'$ existe un objeto A de $\mathcal{C}$ tal que $F(A) \cong A'$.

Lema 2.1.9. *Sea $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un funtor plenamente fiel. Si $f\colon A \to B$ en un morfismo en $\mathcal{C}$ tal que $F(f)$ es un isomorfismo, entonces f es un isomorfismo.*

Demostración. Sea $g'\colon F(B) \to F(A)$ el morfismo inverso de $F(f)$, entonces como F es pleno existe un morfismo $g\colon B \to A$ tal que $F(g) = g'$. Luego, $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) = g' \circ F(f) = id_{F(A)} = F(id_A)$, y como F es fiel, resulta $g \circ f = id_A$. Similarmente obtenemos que $f \circ g = id_B$; por tanto, f es un isomorfismo. □

Teorema 2.1.10. *El funtor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ es una equivalencia de categorías si y sólo si F es plenamente fiel y esencialmente sobreyectiva.*

Demostración. Supongamos que F es una equivalencia de categorías; así que existe un funtor $G\colon \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ e isomorfismos de funtores $u\colon id_{\mathcal{C}} \to G \circ F$ y $v\colon id_{\mathcal{C}'} \to F \circ G$. Dado un objeto A' de $\mathcal{C}'$, entonces $v(A')\colon A' \to F(G(A'))$ es un isomorfismo, o sea, F es esencialmente sobreyectiva. Sean ahora $A, B \in \mathcal{C}$ y $f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}(A,B)$ tal que $F(f_1) = F(f_2)$; consideremos el diagrama conmutativo para cada $i = 1, 2$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, Rightarrow, "u(A)"] \arrow[d, "f_i"'] & (G \circ F)(A) \arrow[d, "(G\circ F)(f_i)"] \\
B \arrow[r, Rightarrow, "u(B)"'] & (G \circ F)(B)
\end{tikzcd}$$

donde sabemos que $u(A)$ y $u(B)$ son isomorfismos. Entonces del diagrama sigue que $f_i = u(B)^{-1} \circ (G \circ F)(f_i) \circ u(A)$, y como $(G \circ F)(f_1) = (G \circ F)(f_2)$, obtenemos que $f_1 = f_2$; así, F es fiel. Análogamente podemos deducir que G es fiel. Ahora tomemos un morfismo $f'\colon F(A) \to F(B)$ en $\mathcal{C}'$ y hacemos $f = u(B)^{-1} \circ G(f') \circ u(A)$. Afirmamos que $F(f) = f'$, en efecto, para el morfismo f tenemos un diagrama conmutativo para el cual se tiene $u(B) \circ f = (G \circ F)(f) \circ u(A)$, entonces $G(f') = u(B) \circ f \circ u(A)^{-1} = (G \circ F)(f)$, y puesto que G es fiel, $f' = F(f)$; así que F es pleno.

Supongamos ahora que F es plenamente fiel y esencialmente sobreyectiva. Definamos un funtor G como sigue, para cada objeto A' de $\mathcal{C}'$ escogemos (por el axioma de elección) un objeto A de $\mathcal{C}$ tal que existe un isomorfismo $v(A')\colon A' \to F(A)$, definimos entonces $G(A') := A$. Sea $f' \in \mathrm{Hom}(A', B')$; desde que F es pleno, para el morfismo $v(B') \circ$

$f' \circ v(A')^{-1} \colon F(G(A')) \to F(G(B'))$, existe un morfismo $f \colon G(A') \to G(B')$ tal que $F(f) = v(B') \circ f' \circ v(A')^{-1}$, y como F es fiel, f es único, entonces definimos $G(f') := f$, luego tenemos la ecuación

$$F(G(f')) \circ v(A') = v(B') \circ f', \tag{2.1.1}$$

es decir, el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, Rightarrow, "v(A')"] \arrow[d, "f'"'] & F(G(A')) \arrow[d, "F(G(f'))"] \\ B' \arrow[r, Rightarrow, "v(B')"'] & F(G(B')) \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Veamos que G es un funtor, en efecto, como $F(id_{G(A')}) = id_{F(G(A'))} = v(A') \circ id_{A'} \circ v(A')^{-1}$, entonces por definición, $G(id_{A'}) = id_{G(A')}$. A continuación probemos que v es un isomorfismo funtorial de $id_{\mathcal{C}'}$ en $G \circ F$. Sean $f' \colon A' \to B'$ y $g' \colon B' \to C'$ dos morfismos; como F es fiel, para ver que $G(g' \circ f') = G(g') \circ G(f')$, es suficiente verificar la igualdad $F(G(g' \circ f')) = F(G(g')) \circ F(G(f'))$, pero esto último resulta del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, Rightarrow, "v(A')"] \arrow[d, "f'"'] \arrow[dd, bend right, "g' \circ f'"'] & F(G(A')) \arrow[d, "F(G(f'))"'] \arrow[dd, bend left, "F(G(g' \circ f'))"] \\ B' \arrow[r, Rightarrow, "v(B')"'] \arrow[d, "g'"'] & F(G(B')) \arrow[d, "F(G(g'))"'] \\ C' \arrow[r, Rightarrow, "v(C')"'] & F(G(C')) \end{tikzcd}$$

De esta manera G es un funtor, luego se sigue de inmediato que v es un isomorfismo de $id_{\mathcal{C}'}$ en $F \circ G$. Definamos ahora un isomorfismo de en $id_{\mathcal{C}}$ en $G \circ F$, para esto consideremos el isomorfismo $v(F(A)) \colon F(A) \to F(G(F(A)))$; como F es plenamente fiel, existe un único morfismo $u(A) \colon A \to G(F(A))$ tal que $F(u(A)) = v(F(A))$, y por el Lema 2.1.9, $u(A)$ es un isomorfismo. Sea ahora $f \colon A \to B$ un morfismo de $\mathcal{C}$, tomando $A' = F(A), B' = F(B)$ y $f' = F(f)$ en la ecuación (2.1.1), tenemos

$$F(G(F(f))) \circ v(F(A)) = v(F(B)) \circ F(f)$$

y como $v(F(A)) = F(u(A))$, $v(F(B)) = F(u(B))$ y F es fiel, resulta la ecuación $G(F(f)) \circ$

$u(A) = u(B) \circ f$, es decir, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, Rightarrow, "u(A)"] \arrow[d, "f"'] & G(F(A)) \arrow[d, "G(F(f))"] \\
B \arrow[r, Rightarrow, "u(B)"'] & G(F(B))
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. De esta manera u es un isomorfismo de $id_{\mathcal{C}}$ en $G \circ F$. $\square$

Definición 2.1.8. Sean $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ y $G\colon \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ funtores. Decimos que F es *adjunto a izquierda* de G o también que G es *adjunto a derecha* de F si existe un isomorfismo $\Psi\colon \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G(-)) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(F(-), -)$, es decir, para cada par de objetos A de $\mathcal{C}$ y B de $\mathcal{C}'$, existe un isomorfismo $\Psi_{A,B}\colon \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, GB) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(FA, B)$ tal que para cada morfismo $f\colon A \to A'$ en $\mathcal{C}$ y cada morfismo $g\colon B \to B'$ en $\mathcal{C}'$, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A', GB) \arrow[rr, Rightarrow, "\Psi_{A',B}"] \arrow[dl] \arrow[dd] & & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}'}(FA', B) \arrow[dl] \arrow[dd] \\
\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, GB) \arrow[rr, Rightarrow, "\Psi_{A,B}"] \arrow[dd] & & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}'}(FA, B) \arrow[dd] & \\
& \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A', GB') \arrow[rr, Rightarrow, "\Psi_{A',B'}"] \arrow[dl] & & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}'}(FA', B') \arrow[dl] \\
\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, GB') \arrow[rr, Rightarrow, "\Psi_{A,B'}"] & & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}'}(FA, B') &
\end{tikzcd}$$

donde las flechas verticales son las aplicaciones inducidas por f y g de manera natural. En este caso diremos que (F, G) es un *par adjunto* de funtores.

Ejemplo 2.1.11. Sea A un anillo y L un A-módulo. Entonces el funtor

$$\operatorname{Hom}_A(L, \cdot)\colon \mathbf{Mod}(A) \to \mathbf{Mod}(A)$$

es adjunto a derecha del funtor $\cdot \otimes_A L$. En efecto, para $M, N \in \mathfrak{Mod}(A)$, tenemos los isomorfismos

$$\Psi_{M,N}\colon \operatorname{Hom}_A(M, \operatorname{Hom}_A(L, N)) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A(M \otimes_A L, N)\,,$$

definido como $\Psi_{M,N}(h)(m\otimes l) = h(m)(l)$ para todo homomorfismo de A-módulos $h\colon M \to \mathrm{Hom}_A(L,N)$ y para todo par $(m,l) \in M \times L$. Además es inmediato verificar que estos isomorfismos satisfacen el diagrama conmutativo de la definición anterior.

2.2 Aspectos de Álgebra Conmutativa

En esta sección revisaremos algunos aspectos del álgebra conmutativa necesarios para los capítulos posteriores. En lo que sigue, un anillo será un anillo conmutativo con unidad.

Definición 2.2.1. Un *anillo graduado* es un anillo S junto con una descomposición $S = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} S_d$ de S como suma directa de grupos abelianos S_d con $d \in \mathbb{Z}$ tal que para todo $d, e \in \mathbb{Z}$, $S_dS_e \subseteq S_{d+e}$. Un elemento x de S_d es llamado *homogéneo* o más precisamente *homogéneo de grado* d, en este denotamos $\partial(x) = d$. Luego, cualquier elemento de S se escribe de manera única como suma de elementos homogéneos. Un ideal $\mathfrak{a} \subseteq S$ es un *ideal homogéneo* si $\mathfrak{a} = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}}(\mathfrak{a} \cap S_d)$, esto equivale a decir que $\mathfrak{a}$ es generado por elementos homogéneos. Denotaremos por S_+ al ideal $\bigoplus_{d\geq 1} S_d$. Un *homomorfismo* de anillos graduados $\varphi\colon S \to T$ es un homomorfismo de anillos que preserva grados, es decir $\varphi(S_d) \subseteq T_d$ para todo $d \in \mathbb{Z}$, denotaremos por $\varphi_d\colon S_d \to T_d$ a la restricción de φ.

Ejemplo 2.2.1. Sea A un anillo. El anillo de los polinomios $A[x_0, \ldots, x_r]$ es un anillo graduado, donde S_d es el conjunto de polinomios homogéneos de grado d para $d \geq 0$ y $S_d = 0$ para $d < 0$.

Proposición 2.2.2. *La suma, producto, intersección y radical de ideales homogéneos son homogéneos.*

Demostración. Sean $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ ideales homogéneos. Es fácil ver que $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ y $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ son homogéneos. Que $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ es homogéneo sigue directo de la definición.

Ahora consideremos el radical $\sqrt{\mathfrak{a}}$ de un ideal homogéneo $\mathfrak{a}$. Sea $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ y sea $f = f_s + f_{s+1} + \ldots$ la descomposición de f es sus componentes homogéneas, donde f_s es la componente inicial de f. Entonces $f^\rho = f_s^\rho + \{\text{términos de grado} > s\rho\} \in \mathfrak{a}$ para algún entero ρ. Desde que $\mathfrak{a}$ es homogéneo, sigue que cada componente de f^ρ pertenece a $\mathfrak{a}$, es decir, cada componente de f está en $\sqrt{\mathfrak{a}}$. Por lo tanto, $\sqrt{\mathfrak{a}}$ es un ideal homogéneo. □

Proposición 2.2.3. *Sea S un anillo graduado y $T \subseteq S$ un conjunto multiplicativo. Si $\mathfrak{a}$ un ideal homogéneo de S tal que $\mathfrak{a} \cap T = \emptyset$ y W es el conjunto de todos los ideales homogéneos $\mathfrak{b} \subseteq S$ tal que $\mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b} \cap T = \emptyset$, entonces W (ordenado por inclusión) posee elemento maximal y es un ideal primo homogéneo.*

Demostración. Como $\mathfrak{a} \in W$ entonces $W \neq \emptyset$ y por el lema de Zorn W posee elemento maximal. Sea ahora $\mathfrak{q}$ un elemento maximal de W, entonces $\mathfrak{q} \in W$ y es un ideal homogéneo, así para probar que $\mathfrak{q}$ es un ideal primo basta probar que si $a, b \in S$ son homogéneos con $ab \in \mathfrak{q}$ entonces $a \in \mathfrak{q}$ ó $b \in \mathfrak{q}$. Si $a \notin \mathfrak{q}$ y $b \notin \mathfrak{q}$ entonces $(a) + \mathfrak{q}$ y $(b) + \mathfrak{q}$ son ideales homogéneos que contienen propiamente a $\mathfrak{q}$, y puesto que $\mathfrak{q}$ es maximal, ambos ideales intersectan a T, digamos que algunos de sus elementos comunes son $t = ar + q$ y $t' = bs + q'$ donde $q, q' \in \mathfrak{q}$ y $r, s \in S$. Entonces $tt' \in T$ y $tt' = (ab)rs + arq' + qbs + qq' \in \mathfrak{q}$, luego $\mathfrak{q} \cap T \neq \emptyset$ y $\mathfrak{q} \notin W$. Esta contradicción prueba que $\mathfrak{q}$ es primo. □

Corolario 2.2.4. *Sea S un anillo graduado y $\mathfrak{a}$ un ideal homogéneo de S, entonces $\sqrt{\mathfrak{a}}$ es igual a la intersección de todos los primos homogéneos que contienen a $\mathfrak{a}$. En particular, el nilradical de S es igual a la intersección de todos los primos homogéneos de S.*

Demostración. Sea $\mathfrak{b}$ la intersección de todos los primos homogéneos que contienen a $\mathfrak{a}$. Es evidente que $\mathfrak{b}$ es un ideal homogéneo. Por otro lado, como $\sqrt{\mathfrak{a}}$ es la intersección de todos los ideales primos de S entonces $\sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq \mathfrak{b}$. Para la inclusión reciproca, tomemos un ideal primo $\mathfrak{p}$ arbitrario y consideremos $T = S \setminus \{\mathfrak{p}\}$ en la Proposición 2.2.3, entonces existe un ideal primo homogéneo $\mathfrak{q}$ tal que $\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{a}$ y $\mathfrak{q} \cap T = \emptyset$ o sea $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$, entonces $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{q}$, luego $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$. Por tanto $\mathfrak{b} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$. □

Lema 2.2.5. *Sean S, T anillos graduados, $\varphi\colon S \to T$ un homomorfismo graduado y sea I un ideal homogéneo de T, se cumple que $(\varphi^{-1}(I))_d = \varphi_d^{-1}(I_d)$ para todo $d \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. Fijemos $d \in \mathbb{Z}$, y tomemos un elemento $x \in S$, entonces

$$x \in \varphi^{-1}(I))_d \Leftrightarrow \varphi(x) \in I \text{ y } \partial(x) = d \Leftrightarrow \varphi_d(x) = \varphi(x) \in I$$
$$colon\text{y } \partial(\varphi(x)) = d$$
$$\Leftrightarrow \varphi_d(x) \in I_d \Leftrightarrow x \in \varphi_d^{-1}(I_d).$$

□

Definición 2.2.2. Si S es un anillo graduado entonces un *S-módulo graduado* es un S-módulo M junto con una descomposición $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ de M como suma directa de grupos abelianos M_n tal que $S_d M_n \subseteq M_{d+n}$para todo $d, n \in \mathbb{Z}$. Un elemento de M_n es llamado *elemento homogéneo de grado n*, así cualquier elemento de M se escribe de manera única como suma de elementos homogéneos. Un *homomorfismo* de S-módulos graduados es un homomorfismo de S-módulos que preserva grados. Denotaremos a la categoría de los S-módulos graduados por $\mathbf{ModGr}(S)$.

Un *submódulo graduado* de un módulo graduado M es un submódulo N si $N = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}(N \cap M_n)$, esto equivale a decir que N es generado por elementos homogéneos.

Definición 2.2.3. Sea S un anillo graduado y M un S-módulo graduado. Para cualquier $n \in \mathbb{Z}$, el *módulo torcido* $M(n)$ es el S-módulo graduado tal que $M(n)_d = M_{n+d}$ para todo $d \in \mathbb{Z}$. Si $\varphi\colon M \to N$ es un homomorfismo de S-módulos graduados, denotaremos por $\varphi(n)\colon M(n) \to N(n)$ a la misma función φ. Esto define un funtor

$$-(n)\colon \mathbf{ModGr}(S) \to \mathbf{ModGr}(S)\,.$$

Este funtor es de hecho exacto.

Ejemplo 2.2.6. Sea S el anillo de los polinomios como el Ejemplo 2.2.1 con $r = 2$. El polinomio $f = x_0^3 - x_0^2 x_1 + x_2^3$ tiene grado 1 como elemento de $S(2)$, pero tiene grado 4 como elemento de $S(-1)$.

Definición 2.2.4. Sea S un anillo graduado y M un S-módulo graduado y sea T un conjunto multiplicativo de S formado por elementos homogéneos. Si para $n \in \mathbb{Z}$, ponemos $T_n = T \cap S_n$ y denotamos por $(T^{-1}S)_n$ al conjunto formado por elementos a/s donde $a \in S_k$ y $s \in T_j$ tal que $k - j = n$, este conjunto es un grupo con la operación natural $a/s + b/t := (ta + sb)/st$. Si definimos $(a/s).(b/t) := ab/st$ para $a/s \in (T^{-1}S)_n$ y

$b/t \in (T^{-1}S)_m$, $m, n \in \mathbb{Z}$, entonces la suma directa de los grupos $(T^{-1}S)_n$ con $n \in \mathbb{Z}$ nos da un anillo graduado, que denotamos por $T^{-1}S$. Similarmente, para $n \in \mathbb{Z}$, el conjunto $(T^{-1}M)_n$ formado por elementos m/s donde $m \in M_k$ y $s \in T_j$ tal que $k - j = n$, es un grupo abeliano. Definiendo $(a/s).(m/t) := am/st$ para $a/s \in (T^{-1}S)_n$ y $m/t \in (T^{-1}M)_m$, $m, n \in \mathbb{Z}$, tenemos que la suma directa de los grupos $(T^{-1}S)_n$ con $n \in \mathbb{Z}$ es un $T^{-1}S$-módulo graduado, que denotamos por $T^{-1}M$.

En particular si $\mathfrak{p}$ un ideal primo homogéneo de S y si T el conjunto de todos los elementos homogéneos de $S \setminus \mathfrak{p}$, denotaremos por $S_{(\mathfrak{p})}$ al subanillo de $(T^{-1}S)_0$. Este es un anillo local con ideal maximal $T^{-1}\mathfrak{p} \cap S_{(\mathfrak{p})}$. Asimismo, denotaremos por $M_{(\mathfrak{p})}$ al subgrupo $(T^{-1}M)_0$, entonces $M_{(\mathfrak{p})}$ es un $S_{(\mathfrak{p})}$-módulo. Si $\varphi\colon M \to N$ es un homomorfismo de S-módulos graduados entonces la aplicación $\varphi_{(\mathfrak{p})}\colon M_{(\mathfrak{p})} \to N_{(\mathfrak{p})}$ dado por $m/s \mapsto \varphi(m)/s$ define un homomorfismo de $S_{(\mathfrak{p})}$-módulos. Esto define un funtor

$$(-)_{(\mathfrak{p})}\colon \mathbf{ModGr}(S) \to \mathbf{Mod}(S_{(\mathfrak{p})})\,.$$

Sea $f \in S$ un elemento homogéneo de grado d. Si consideramos T como el conjunto multiplicativo formado por las potencias de f, entonces $(T^{-1}S)_0$ es un subanillo, formado por elementos s/f^n donde s es un elemento homogéneo de grado nd, este subanillo será denotado por $S_{(f)}$. De manera similar, denotaremos por $M_{(f)}$ al subgrupo $(T^{-1}M)_0$, que naturalmente es un $S_{(f)}$-módulo. Si $\varphi\colon M \to N$ es un homomorfismo de S-módulos graduados entonces la aplicación $\varphi_{(f)}\colon M_{(f)} \to N_{(f)}$ dado por $m/f^k \mapsto \varphi(m)/f^k$ define un homomorfismo de $S_{(f)}$-módulos. Esto define un funtor

$$(-)_{(f)}\colon \mathbf{ModGr}(S) \to \mathbf{Mod}(S_{(f)})\,.$$

Lema 2.2.7. *Sea S un anillo graduado y sea una sucesión exacta de S-módulos graduados $0 \to M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} L \to 0$. Entonces para cualquier ideal primo homogéneo $\mathfrak{p}$, la sucesión de $S_{(\mathfrak{p})}$-módulos*

$$0 \to M_{(\mathfrak{p})} \xrightarrow{\varphi_{(\mathfrak{p})}} N_{(\mathfrak{p})} \xrightarrow{\psi_{(\mathfrak{p})}} L_{(\mathfrak{p})} \to 0$$

es exacta.

Demostración. Se $m/s \in M_{(\mathfrak{p})}$ tenemos $\psi_{(\mathfrak{p})} \circ \varphi_{(\mathfrak{p})}(m/s) = \psi \circ \varphi(m)/s = 0/s = 0$ entonces Im $\varphi_{(\mathfrak{p})} \subseteq$ Nuc $\psi_{(\mathfrak{p})}$. Por otro lado, dado $n/t \in$ Nuc $\psi_{(\mathfrak{p})}$, tenemos $\psi(n)/t = 0$ luego existe un elemento homogéneo $\lambda \notin \mathfrak{p}$ tal que $\lambda\psi(n) = 0$. Puesto que $\psi(\lambda n) = \lambda\psi(n) = 0$, existe un elemento homogéneo $m \in M$ del mismo grado que λn tal que $\lambda n = \varphi(m)$. Entonces $\varphi_{(\mathfrak{p})}(m/\lambda t) = \varphi(m)/\lambda t = \lambda n/\lambda t = n/t$. □

Si S un anillo graduado y M un S-módulo graduado tal que $S_n = 0$ (resp. $M < 0$) para todo $n < 0$, entonces diremos que S (resp. M) es un *anillo* (resp. *módulo*) *de grados positivos*. En adelante, todos los anillos graduados que consideremos serán de grado positivo.

Proposición 2.2.8. *Sea S un anillo graduado.*

(a) *El ideal S_+ es finitamente generado si, y sólo si, S es un S_0-álgebra de tipo finito.*

(b) *Si M es un S-módulo graduado de tipo finito, entonces para todo $n \in \mathbb{Z}$, M_n es un S_0-módulo de tipo finito, además existe un entero n_0, tal que $M_n = 0$ para todo $n < n_0$.*

Demostración. Véase Bourbaki [2], pag. 185 y 186. □

Proposición 2.2.9. *Sea S un anillo graduado. Entonces S es noetheriano si, y sólo si, S_0 es noetheriano y S es un S_0-álgebra de tipo finito.*

Demostración. Véase Atiyah-Macdonald [1], prop. 10.7. □

Definición 2.2.5. Sea S un anillo graduado. Un S-módulo graduado M es *libre* si es isomorfo al S-módulo graduado $\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} S(l_i)$, donde cada l_i es número entero. Si M es isomorfo a $\bigoplus_{i=1}^{n} S(l_i)$ para algún entero $n \geq 1$, diremos que M es *libre de rango finito* o más precisamente *libre de rango n*.

Lema 2.2.10. *Sea S un S_0-álgebra de tipo finito donde S_0 es un anillo noetheriano y sea M un S-módulo graduado finitamente generado. Entonces existe una sucesión exacta,*

$$L' \to L \to M \to 0\,,$$

donde L' y L son S-módulos libres de rango finito.

Demostración. Por la Proposición 2.2.9, S es un anillo noetheriano. Sean $x_1, \ldots, x_r$ los generadores de M, sea $l_i = \partial(x_i)$ para todo $i = 1, \ldots, r$, y consideremos los elementos $e_i \in \bigoplus_{i=1}^{r} S$ de la forma $(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ donde 1 está en el lugar i-ésimo, entonces tenemos el homomorfismo graduado sobreyectivo $\varphi\colon L := \bigoplus_{i=1}^{r} S(-l_i) \to M$ por $e_i \mapsto x_i$. Sea K el núcleo de este homomorfismo, entonces desde que S es noetheriano, K es un S-submódulo finitamente generado de L, luego usamos el mismo argumento anterior para obtener un homomorfismo graduado sobreyectivo $\psi\colon L' \to K$, donde L' es un S-módulo libre de rango finito. Luego es inmediato verificar que la sucesión

$$L' \xrightarrow{\psi} L \xrightarrow{\varphi} M \to 0$$

es exacta. □

Lema 2.2.11. *Sea S un anillo graduado y sea $f \in S_+$ un elemento homogéneo. Entonces:*

(a) *Si $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{p}$ son ideales homogéneos de S, tal que $\mathfrak{p}$ es primo, $f \notin \mathfrak{p}$ y $\mathfrak{a}S_f \cap S_{(f)} \subseteq \mathfrak{p}S_f \cap S_{(f)}$, tenemos que $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$.*

(b) *Para cada ideal radical I de $S_{(f)}$, existe un ideal radical homogéneo $\mathfrak{a}$ de S tal que $\mathfrak{a}S_f \cap S_{(f)} = I$.*

Demostración. (a) Sea un elemento $a \in \mathfrak{a}$ homogéneo de grado k, entonces $\frac{a^d}{f^k} \in \mathfrak{a}S_f \cap S_{(f)} \subseteq \mathfrak{p}S_f \cap S_{(f)}$, luego $\frac{a^d}{f^k} \in \mathfrak{p}S_f$ y puesto que este ideal es primo y $\frac{1}{f^k}$ es una unidad en S_f, tenemos $\frac{a}{1} \in \mathfrak{p}S_f$, luego $\frac{a}{1} = \frac{b}{f^n}$ donde $b \in \mathfrak{p}$. Por definición de localización, existe un entero $m \geq 1$, tal que $f^m(f^n a - b) = 0$, luego $f^{m+n}a = f^m b \in \mathfrak{p}$, y como $f \notin \mathfrak{p}$ tenemos que $a \in \mathfrak{p}$. Por tanto $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$.

(b) Sea H el conjunto de elementos homogéneos $a \in S$ tal que $\frac{a}{f^k} \in I$ para algún $k \geq 0$, y consideremos el ideal radical $\mathfrak{a} = \sqrt{\langle H \rangle} \subseteq S$. Afirmamos que $\mathfrak{a}S_f \cap S_{(f)} = I$. En efecto, sea $\frac{a}{f^k} \in I \subseteq S_{(f)}$ un elemento arbitrario, entonces como a es homogéneo, $a \in H \subseteq \mathfrak{a}$, luego $\frac{a}{f^k} \in \mathfrak{a}S_f$, por tanto $\frac{a}{f^k} \in \mathfrak{a}S_f \cap S_{(f)}$. Recíprocamente, si $\frac{a}{f^k} \in \mathfrak{a}S_f \cap S_{(f)}$ tenemos $\frac{a}{f^k} \in \mathfrak{a}S_f$, así $\frac{a}{f^k} = \frac{b}{f^j}$, con $b \in \mathfrak{a}$, y de la definición de $\mathfrak{a}$ tenemos que para algún $m \geq 1$, $b^m = \sum_i \lambda_i a_i$ donde $\lambda_i \in S$ y $a_i \in H$, luego existirán enteros $k_i \geq 0$ tal que $\frac{a_i}{f^{k_i}} \in I$ para todo i. Entonces $(\frac{a}{f^k})^m = \frac{b^m}{f^{jm}} = \frac{\sum_i \lambda_i a_i}{f^{jm}} = \sum_i \frac{\lambda_i}{f^{jm-k_i}} \frac{a_i}{f^{k_i}} \in I$, por tanto $\frac{a}{f^k} \in I$. □

A continuación vamos a introducir los conceptos de módulo de tipo casi finito y casi isomorfismo, y vamos a mostrar algunos resultados que serán importantes que en los capítulos posteriores.

Definición 2.2.6. Sea S un anillo graduado y sea M un S-módulo graduado. Para $d \in \mathbb{Z}$ definimos $M\{d\}$ como el S-módulo $\bigoplus_{n \geq d} M_n$ con graduación $M\{d\}_n = M_{n+d}$ para $n \geq 0$ y $M\{d\}_n = 0$ para $n < 0$. Si $\varphi\colon M \to N$ es un homomorfismo de S-módulos graduados, entonces restringiendo φ, conseguimos un homomorfismo de S-módulos graduados $\varphi\{d\}\colon M\{d\} \to N\{d\}$. Esto define un funtor $-\{d\}\colon \mathbf{ModGrad}(S) \to \mathbf{ModGrad}(S)$. De hecho este funtor es exacto.

Decimos que dos S-módulos graduados M y N son *casi isomorfos*, y escribimos $M \approx N$, si existe un entero $d \geq 0$ tal que $M\{d\} \cong N\{d\}$ como S-módulos graduados. La relación $\approx$ es una relación de equivalencia sobre la colección de S-módulos graduados, y es evidente que si M, N son isomorfos como S-módulos graduados entonces ellos son casi isomorfos. Además, $M \cong 0$ si, y sólo, si existe $d \geq 0$ tal que $M_n = 0$ para todo $n \geq d$.

Sea $\varphi\colon M \to N$ un homomorfismo de S-módulos graduados, diremos que φ es un *casi isomorfismo* si $\varphi\{d\}$ es un isomorfismo en $\mathbf{ModGr}(S)$ para algún $d \geq 0$. Notemos que si existe un casi isomorfismo $M \to N$ entonces $M \approx N$, la recíproca no necesariamente es cierto.

Observación 2.2.1. Sea S un anillo graduado y M un S-módulo graduado. Se cumplen las siguientes igualdades:

(a) $M(n)(d) = M(n+d) = M(d)(n)$ para todo $n, d \in \mathbb{Z}$.

(b) $M(n)\{d\} = M\{n+d\}$ para todo $n, d \in \mathbb{Z}$.

(c) $M\{n\}\{d\} = M\{n+d\}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y $d \geq 0$

La afirmación (c) puede fallar si $d < 0$.

Lema 2.2.12. *Sea S un anillo graduado y sea M un S-módulo graduado de tipo finito. Si S es un S_0-álgebra de tipo finito, entonces $M\{d\}$ es un S-módulo graduado de tipo finito para todo $d \geq 0$.*

Demostración. Supongamos que S es generado como un S_0-álgebra por elementos homogéneos f_i de grado $h_i \geq 1$ con $1 \leq i \leq r$, y M es generado como un S-módulo por elementos homogéneos x_j de grado $k_j \geq 1$ con $1 \leq j \leq s$. Fijemos $1 \leq j \leq s$ y consideremos una tupla $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ de enteros $\alpha_i \geq 0$ tal que $k_j + \Sigma_i \alpha_i h_i \geq d$ y con la condición que si reemplazamos cualquier α_i por otro entero estrictamente menor, la suma es estrictamente menor que d. Entonces hay un número finito de tales tuplas así como j varía de 1 a s. Afirmamos que los elementos homogéneos $f_1^{\alpha_1} \cdots f_r^{\alpha_r} x_j$ generan $M\{d\}$ como

S-módulo, en efecto, dado un elemento homogéneo $x \in M\{d\}$, tenemos que $e = \partial(x) \geq d$ y x es una suma de elementos homogéneos $a_0 f_1^{\beta_1} \cdots f_r^{\beta_r} x_j$ de grado e donde $a_0 \in S_0$. Por la definición de la tupla $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, tenemos que $\beta_i \geq \alpha_i$ para todo $i = 1, \ldots, r$, así, x es una suma de elementos de la forma $b f_1^{\alpha_1} \cdots f_r^{\alpha_r} x_j$ con $b \in S$. Luego todo elemento de $M\{d\}$ se escribe en dicha forma, de esta manera $M\{d\}$ es un S-módulo de tipo finito. □

Definición 2.2.7. Sea S un anillo graduado y M un S-módulo graduado. Decimos que M es de *tipo casi finito* si existe $d \geq 0$ tal que $M\{d\}$ es un S-módulo de tipo finito. Denotemos por $\mathbf{ModGrcf}(S)$ a la categoría de los S-módulos graduados de tipo casi finito.

Lema 2.2.13. *Sea S un anillo graduado de tipo finito como S_0-álgebra y sea M un S-módulo graduado. Entonces se cumplen las afirmaciones:*

(a) *Si $d \geq 0$, M es de tipo casi finito si y sólo si $M\{d\}$ también lo es.*

(b) *Si $n \in \mathbb{Z}$, M es de tipo casi finito si y sólo si $M(n)$ también lo es.*

(c) *M es de tipo casi finito si, y sólo si, $M \approx N$ para algún S-módulo graduado N de tipo finito.*

Demostración. (a) Dado $d \geq 0$, si M es de tipo casi finito entonces por definición, $M\{n\}$ es de tipo finito para algún $n \geq 0$, por el Lema 2.2.12, $M\{n\}\{d\}$ es también de tipo finito, y puesto que $M\{d\}\{n\} = M\{d+n\} = M\{n\}\{d\}$, el módulo $M\{d\}$ es de tipo casi finito. Recíprocamente, si $M\{d\}$ es de tipo casi finito, entonces $M\{d\}\{n\}$ es de tipo finito para algún $n \geq 0$, y como $M\{d+n\} = M\{d\}\{n\}$, se sigue que M es de tipo casi finito.

(b) Si $n \in \mathbb{Z}$ y $M(n)$ es de tipo casi finito, entonces $M(n)\{d\}$ es de tipo finito para algún $d \geq 0$, y como $M\{n+d\} = M(n)\{d\}$, se sigue que M es de tipo casi finito. Recíprocamente, si M es de tipo casi finito, aplicamos la parte anterior a la igualdad $M = M(n)(-n)$ y obtenemos que $M(n)$ es de tipo casi finito.

(c) Si que $M \approx N$ para algún S-módulo graduado N de tipo finito, entonces existe $d \geq 0$ para lo cual $M\{d\} \cong N\{d\}$, por el Lema 2.2.12, $N\{d\}$ es de tipo finito, luego M es de tipo casi finito. Recíprocamente, si M es de tipo casi finito entonces $M\{d\}$ es de tipo finito para algún $d \geq 0$. Ahora, puesto que $M\{d\}(-d)\{d\} = M\{d\}$, tenemos $M \approx M\{d\}(-d)$, donde los generadores de $M\{d\}(-d)$ se corresponden con los generadores de $M\{d\}$, por tanto, $M\{d\}(-d)$ es de tipo finito. □

Lema 2.2.14. *Sea S un anillo graduado noetheriano y supongamos que tenemos una sucesión de S-módulos graduados*

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0\,.$$

Entonces, M es de tipo casi finito si, y sólo si, ambos M', M'' son de tipo casi finito.

Demostración. Si M es de tipo casi finito, entonces $M\{d\}$ es de tipo finito para algún $d \geq 0$. Luego, desde que el funtor $-\{d\}$ es exacto y S es noetheriano, obtenemos que $M'\{d\}$ y $M''\{d\}$ son de tipo finito, así, M', M'' son de tipo casi finito. Recíprocamente, existen enteros $d, e \geq 0$ tal que $M'\{d\}$ y $M''\{e\}$ son de tipo finito. Por el Lema 2.2.12, $M'\{d+e\}$ y $M''\{d+e\}$ son de tipo finito, luego siguiendo el argumento anterior, obtenemos que M es de tipo casi finito. □

Lema 2.2.15. *Sea S un anillo graduado y sea $\varphi\colon M \to N$ un morfismo de S-módulos graduados. Entonces, φ es casi isomorfismo si, y sólo si,* $\operatorname{Nuc}\varphi \approx 0$ *y* $\operatorname{Conuc}\varphi \approx 0$.

Demostración. Por la exactitud del funtor $-\{d\}$, se tiene $(\operatorname{Nuc}\varphi)\{d\} = \operatorname{Nuc}(\varphi\{d\})$ y $(\operatorname{Conuc}\varphi)\{d\} = \operatorname{Conuc}(\varphi\{d\})$ para todo entero d. Ahora bien, si φ es casi isomorfismo entonces $\varphi\{d\}$ es un isomorfismo para algún $d \geq 0$. Luego se tiene $(\operatorname{Nuc}\varphi)\{d\} = \operatorname{Nuc}(\varphi\{d\}) = 0$ y $(\operatorname{Conuc}\varphi)\{d\} = \operatorname{Conuc}(\varphi\{d\}) = 0$, así, $\operatorname{Nuc}\varphi \approx 0$ y $\operatorname{Conuc}\varphi \approx 0$. Recíprocamente, existen enteros $d, e \geq 0$ tal que $(\operatorname{Nuc}\varphi)\{d\} = 0$ y $(\operatorname{Conuc}\varphi)\{e\} = 0$, luego $(\operatorname{Nuc}\varphi)\{d+e\} = 0$ y $(\operatorname{Conuc}\varphi)\{d+e\} = 0$, esto implica que $\varphi\{d+e\}$ es inyectiva y sobreyectiva, por tanto φ es casi isomorfismo. □

Los siguientes teoremas que vamos a mencionar serán usados en el capítulo 3.

Teorema 2.2.16 (Finitud de la Clausura Integral)**.** *Sea A un dominio integral que es un álgebra finitamente generado sobre un cuerpo k. Sea K el cuerpo cociente de A, y L una extensión algebraica finita de K. Entonces la clausura integral A' de A en L es un A-módulo finitamente generado y un k-álgebra de tipo finito.*

Demostración. Ver Zariski-Samuel [16] volumen I, cap. V, Teo. 9 , pag. 267. □

Teorema 2.2.17. *Sea M un módulo graduado sobre un anillo graduado y noetheriano S. Entonces existe una filtración $0 = M^0 \subseteq M^1 \subseteq \cdots \subseteq M^r = M$ por submódulos graduados, tal que para cada i, $M^i/M^{i-1} \cong (S/\mathfrak{p}_i)(l_i)$, donde $\mathfrak{p}_i$ es un ideal primo homogéneo de S, y $l_i \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. Ver Bourbaki [2] cap. 4 sección 4 pag. 312 o Hartshorne [6] pag. 50. □

A continuación mencionaremos un teorema de Hilbert-Serre y daremos la definición del polinomio de Hilbert de un módulo graduado sobre el anillo $S = k[x_0, \ldots, x_n]$, donde k es un cuerpo. Usaremos estos resultados en el capítulo 4.

Definición 2.2.8. Un *polinomio numérico* es un polinomio $P(z) \in \mathbb{Q}[z]$ tal que $P(n) \in \mathbb{Z}$ para todo entero n suficientemente grande.

Proposición 2.2.18. *Si $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ es cualquier función, y si existe un polinomio numérico $P(z) \in \mathbb{Q}[z]$ tal que la función diferencia $\Delta f = f(n+1) - f(n)$ es igual a $\mathbb{Q}(n)$ para todo entero n suficientemente grande. Entonces existe un polinomio numérico $P(z)$ tal que $f(n) = P(n)$ para todo entero n suficientemente grande.*

Demostración. Ver Hartshorne [6] pag. 49, prop. 7.3. □

Definición 2.2.9. Sea M un módulo graduado finitamente generado sobre $S = k[x_0, \ldots, x_n]$. Definimos la *función de Hilbert* φ_M de M, por

$$\varphi_M(l) = dim_k M_l$$

para todo $l \in \mathbb{Z}$.

Teorema 2.2.19 (Hilbert-Serre)**.** *Sea M un módulo graduado finitamente generado sobre $S = k[x_0, \ldots, x_n]$. Entonces existe un único polinomio $P_M(z) \in \mathbb{Q}[z]$ tal que $\varphi_M(l) = P_M(l)$ para todo entero l suficientemente grande.*

Demostración. Ver Hartshorne [6] pag. 51, Teor. 7.5. □

Definición 2.2.10. El polinomio P_M del teorema anterior es llamado *polinomio de Hilbert* de M.

2.3 Aspectos Topológicos

En esta sección introduciremos brevemente los aspectos topológicos del espectro Spec A de un anillo A y del espectro proyectivo Proj S de un anillo graduado S.

Definición 2.3.1. Sea A un anillo. Denotaremos por Spec A al conjunto de ideales primos de A, y llamaremos el *espectro* de A. Para cada subconjunto S de A, sea

$$V(S) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \,:\, S \subseteq \mathfrak{p}\}$$

y sea $\mathcal{C}$ la colección de estos conjuntos. Si $\mathfrak{a} = \langle S \rangle$, se tiene claramente que $V(S) = V(\mathfrak{a}) = V(\sqrt{\mathfrak{a}})$; así que $\mathfrak{C}$ puede ser considerado simplemente como la colección de conjuntos de la forma $V(\mathfrak{a})$, donde $\mathfrak{a}$ es un ideal de A. Si $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$, escribimos $V(S) = V(a_1, \ldots, a_n)$.

Proposición 2.3.1. *Sea A un anillo y $X = \operatorname{Spec} A$. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(a) $V(0) = X$ *y* $V(1) = \emptyset$.

(b) *Dados los ideales $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ de A, se tiene*

$$V(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2) = V(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2) = V(\mathfrak{a}_1) \cup V(\mathfrak{a}_2).$$

(c) *Dada la familia $\{\mathfrak{a}_i\}_{i\in I}$ de ideales de A, se tiene*

$$\bigcap_{i\in I} V(\mathfrak{a}_i) = V\left(\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i\right) = V\left(\bigcup_{i\in I} \mathfrak{a}_i\right).$$

Demostración. Las afirmaciones (a) y (c) son consecuencias directas de la definición. Por otra parte, para verificar la afirmación (b) es suficiente notar que $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 \subseteq \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2$. □

Definición 2.3.2. De acuerdo a la proposición anterior, existe una única topología sobre X tal que la familia de subconjuntos cerrados de X coincide con $\mathcal{C}$. La topología obtenida es llamada *topología espectral* o *topología de Zariski* de X.

Definición 2.3.3. Sea $X = \operatorname{Spec} A$. Si un elemento $x \in X$ es considerado como ideal primo, lo denotaremos por $\mathfrak{p}_x$. Entonces para un subconjunto Y de X, definimos el ideal $I(Y) = \bigcap_{y\in Y} \mathfrak{p}_y$ llamado el *ideal de* Y. En particular, si $x \in X$ tenemos $I(\{x\}) = \mathfrak{p}_x$.

Teorema 2.3.2. *Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(a) *Dados $S_1 \subseteq S_2$ subconjuntos de A, $V(S_2) \subseteq V(S_1)$.*

(b) *Para cualquier subconjunto Y de X, $Y \subseteq V(I(Y))$.*

(c) *Para cualquier subconjunto Y de X, $I(Y)$ es un ideal radical.*

(d) *Si $Y_1 \subseteq Y_2$ son subconjuntos de X, entonces $I(Y_2) \subseteq I(Y_1)$.*

(e) *Para cualquier subconjunto S de A, $S \subseteq I(V(S))$.*

(f) *Si* $\{Y_i\}_{i\in I}$ *es una familia de subconjuntos de* X*, entonces* $I(\bigcup_{i\in I} Y_i) = \bigcap_{i\in I} I(Y_i)$.

(g) *Para cualquier subconjunto* Y *de* X*,* $V(I(Y)) = \overline{Y}$.

(h) *Para cualquier ideal* $\mathfrak{a}$ *de* A*,* $I(V(\mathfrak{a})) = \sqrt{\langle \mathfrak{a} \rangle}$.

(i) *Sean* Y_1, Y_2 *subconjuntos cerrados de* X*. Entonces,* $Y_1 \subseteq Y_2$ *si, y sólo si,* $I(Y_2) \subseteq I(Y_1)$*, y* $Y_1 \subsetneq Y_2$ *si, y sólo si,* $I(Y_2) \subsetneq I(Y_1)$.

Demostración. Las afirmaciones (a), (b), d y (e) son directas. Veamos (c). Si $Y = \emptyset$, es evidente que $I(\emptyset) = A$. Si $Y \neq \emptyset$, entonces se comprueba fácilmente que $\sqrt{\bigcap_{y\in Y} \mathfrak{p}_y} \subseteq \bigcap_{y\in Y} \mathfrak{p}_y$, así $\sqrt{I(Y)} \subseteq I(Y)$, por tanto $I(Y)$ es radical.

(f). Una inclusión es inmediata a partir de la afirmación (d). Ahora supongamos que $x \notin I(\bigcup_{i\in I} Y_i)$, entonces existe un ideal primo $\mathfrak{p}$ y un índice i tal que $\mathfrak{p} \in Y_i$ y $x \notin \mathfrak{p}$; de aquí, $x \notin I(Y_i)$, lo que prueba la otra inclusión.

(g). Es claro que $\overline{Y} \subseteq V(I(Y))$. Recíprocamente, si C es un subconjunto cerrado de X tal que $Y \subseteq C$, entonces $C = V(\mathfrak{a})$ para algún ideal $\mathfrak{a}$ de A. Por la afirmación (e), $\mathfrak{a} \subseteq I(Y)$, y por la afirmación (a) se sigue que $V(I(Y)) \subseteq V(\mathfrak{a}) = C$.

(h). Si $\mathfrak{a} = A$, entonces $I(V(\mathfrak{a})) = I(V(1)) = I(\emptyset) = A = \sqrt{\mathfrak{a}}$. Por otra parte, si $\mathfrak{a} \neq A$, entonces $I(V(\mathfrak{a})) = \bigcap_{x\in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p}_x = \bigcap_{\mathfrak{a}\subseteq \mathfrak{p}_x} \mathfrak{p}_x = \sqrt{\mathfrak{a}}$.

(i). Es consecuencia de las afirmaciones (a), (d) y (g). □

Corolario 2.3.3. *Sea* $X = \operatorname{Spec} A$ *y sean* $\mathfrak{a}$*,* $\mathfrak{b}$ *ideales de* A*. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(a) $V(\mathfrak{a}) = \emptyset$ *si y sólo si* $\mathfrak{a} = A$.

(b) $V(\mathfrak{a}) = X$ *si y sólo si* $\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\langle 0 \rangle}$.

(c) $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{b})$ *si y sólo si* $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{b}}$.

Demostración. Consecuencia directa del teorema anterior. □

Corolario 2.3.4. *Sean* $x, y \in X = \operatorname{Spec} A$*. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(a) $V(\mathfrak{p}_x) = \overline{\{x\}}$.

(b) $\{x\}$ *es cerrado si, y sólo si,* $\mathfrak{p}_x$ *es maximal.*

(c) $y \in \overline{\{x\}}$ *si, y sólo si,* $\mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{p}_y$.

Demostración. (a). $V(\mathfrak{p}_x) = V(I(\mathfrak{p}_x)) = \overline{\{\mathfrak{p}_x\}} = \overline{\{x\}}$.

(b). Sea $\mathfrak{a}$ un ideal de A tal que $\mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{a}$. Entonces $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{p}_x) = \overline{\{x\}} = \{x\}$. Si $V(\mathfrak{a}) = \{x\}$ entonces $I(V(\mathfrak{a})) = I(\{\mathfrak{p}_x\}) = \mathfrak{p}_x$, por lo que $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_x$ implica $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_x$. Si $V(\mathfrak{a}) \subsetneq \{x\}$ entonces $V(\mathfrak{a}) = \emptyset$, de donde $I(V(\mathfrak{a})) = A$; sin embargo, $I(V(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$, o sea $\mathfrak{a} = A$.

Recíprocamente, veamos que $\{x\} = V(\mathfrak{p}_x)$. Si $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{p}_x)$, entonces $\mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{p}$, por lo que $\mathfrak{p}_x = \mathfrak{p}$, pues $\mathfrak{p}_x$ es maximal. Por lo tanto $\{x\} = V(\mathfrak{p}_x)$.

(c). Sea $y \in \overline{\{x\}}$, según la primera afirmación tenemos que $\mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{p}_y$. Recíprocamente, si $\mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{p}_y$ entonces $y \in V(\mathfrak{p}_x) = \overline{\{x\}}$. □

Observación 2.3.1. Se sigue del ítem (a) de la proposición anterior que Spec A es un espacio T_0, mientras que del ítem (b), se sigue que el conjunto de ideales maximales de A, denotado por *Spm* A, es un espacio T_1.

Definición 2.3.4. Para cada elemento $a \in A$, definimos el *abierto básico* de $X = \operatorname{Spec} A$ como el conjunto $D(a) = X \setminus V(a)$.

Proposición 2.3.5. *Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(a) $\mathcal{B} = \{D(a) : a \in A\}$ *es una base para la topología espectral de* X.

(b) $D(a) = \emptyset$ *si, y sólo si,* a *es nilpotente.*

(c) $D(a) \cap D(b) = D(ab)$.

(d) $D(a) = X$ *si, y sólo si,* a *es una unidad en* A.

(e) $D(a)$ *es casi compacto para todo* $a \in A$.

(f) *Un subconjunto abierto de* X *es casi compacto si, y sólo si, es unión finita de elementos de* $\mathcal{B}$.

Demostración. (a). Es claro que $\mathcal{B}$ está formado por subconjuntos abiertos de X. Sea ahora U un subconjunto abierto de X, luego $X \setminus G = V(\mathfrak{a})$ para algún ideal $\mathfrak{a}$ de A. Así que $V(\mathfrak{a}) = \bigcap_{a\in\mathfrak{a}} V(a)$. Por lo tanto, $U = \bigcup_{a\in\mathfrak{a}}(X \setminus V(a)) = \bigcup_{a\in\mathfrak{a}} D(a)$.

Las afirmaciones (b), (c) y (d) son inmediatas a partir de los corolarios anteriores.

(e). Para cada elemento $a \in A$, es suficiente mostrar que todo cubrimiento de $D(a)$ por conjuntos abiertos $D(a_i)$ tiene un subcubrimiento finito. Supongamos que $D(a) \subseteq \bigcup_{i\in I} D(a_i)$. Sea $\mathfrak{a}$ el ideal de A generado por los elementos a_i. Entonces $V(a) \supseteq \bigcap_{i\in I} V(a_i) = V(\mathfrak{a})$; de aquí, $a \in \sqrt{\mathfrak{a}}$, es decir, $a^n \in \mathfrak{a}$ para algún entero positivo n. Sea $a^n = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i a_i$. Se tiene que $a^n \in \langle a_1, \dots, a_n\rangle = \mathfrak{b}$; de donde,

$$V(a) = V(a^n) \supseteq V(\mathfrak{b}) = \bigcap_{i=1}^{r} V(a_i).$$

Tomando complemento, obtenemos $D(a) \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} D(a_i)$.

(f). Sea U un subconjunto abierto y compacto de X. Tenemos que $U = X \setminus V(\mathfrak{a})$ para algún ideal $\mathfrak{a}$ de A. Así que, $U = \bigcup_{a\in\mathfrak{a}}(X \setminus V(a))$, y como U es compacto, entonces

$$U = \bigcup_{i=1}^{n}(X \setminus V(a_i)) = \bigcup_{i=1}^{n} D(a_i).$$

Recíprocamente, sea $U = \bigcup_{i=1}^{n} D(a_i)$. Desde que cada $D(a_i)$ es compacto, entonces U es compacto, ya que es unión finita de conjuntos compactos. □

Dado un homomorfismo de anillos $\varphi\colon A \to B$ y sean $X = \operatorname{Spec} A$ e $Y = \operatorname{Spec} B$. Notemos que si $\mathfrak{q} \in Y$ tenemos $\mathfrak{q}^c = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \in X$, de esta manera φ induce una aplicación $\varphi^*\colon Y \to X$ definida por $\mathfrak{q} \mapsto \mathfrak{q}^c$.

Proposición 2.3.6. *Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(a) *Si $f \in A$, entonces $(\varphi^*)^{-1}(D(f)) = D(\varphi(f))$.*

(b) *Si $\mathfrak{a}$ es ideal de A, entonces $(\varphi^*)^{-1}(V(\mathfrak{a})) = V(\mathfrak{a}^e)$. De aquí, φ^* es una aplicación continua.*

(c) *Si $\mathfrak{b}$ es ideal de B, entonces $\overline{\varphi^*(V(\mathfrak{b}))} = V(\mathfrak{b}^c)$.*

(d) *Si φ es sobreyectiva, entonces φ^* es un homeomorfismo de Y sobre el subconjunto cerrado $V(\mathrm{Nuc}(\varphi))$ de X.*

(e) *$\varphi^*(Y)$ es denso en X si, y sólo si, $\mathrm{Nuc}(\varphi) \subseteq \sqrt{\langle 0\rangle}$.*

(f) *Si $\psi\colon A \to B$ es otro homomorfismo de anillos, entonces se tiene $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$.*

(g) *Sea A un dominio que tiene sólo un ideal primo no nulo $\mathfrak{p}$ y sea K el cuerpo de fracciones de A. Consideremos $B = (A/\mathfrak{p}) \times K$ y definimos $\varphi\colon A \to B$ por $x \mapsto ([x], x)$. Entonces φ^* es biyectiva pero no es un homeomorfismo.*

Demostración. (a). Sea f un elemento de A. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathfrak{p} \in (\varphi^*)^{-1}(D(f)) &\Leftrightarrow \mathfrak{p} \in (\varphi^*)^{-1}(X \setminus V(f)) \Leftrightarrow \mathfrak{p} \in Y \setminus (\varphi^*)^{-1}(V(f))\\
&\Leftrightarrow \mathfrak{p} \in Y \text{ y } \varphi^*(\mathfrak{p}) \notin V(f) \Leftrightarrow \mathfrak{p} \in Y \text{ y } \mathfrak{p}^c \notin V(f)\\
&\Leftrightarrow \mathfrak{p} \in Y \text{ y } f \notin \mathfrak{p}^c \Leftrightarrow \mathfrak{p} \in Y \text{ y } \varphi(f) \notin \mathfrak{p}\\
&\Leftrightarrow \mathfrak{p} \in Y \text{ y } \mathfrak{p} \notin V(\varphi(f)) \Leftrightarrow \mathfrak{p} \in Y \setminus V(\varphi(f))\\
&\Leftrightarrow \mathfrak{p} \in D(\varphi(f)).
\end{aligned}$$

(b). Sea $\mathfrak{a}$ un ideal de A. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathfrak{p} \in (\varphi^*)^{-1}(V(\mathfrak{a})) &\Leftrightarrow \varphi^*(\mathfrak{p}) \in V(\mathfrak{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{p}^c \in V(\mathfrak{a})\\
&\Leftrightarrow \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}^c \Leftrightarrow \varphi(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{p} \Leftrightarrow \mathfrak{p} \in V(\varphi(\mathfrak{a}))\\
&\Leftrightarrow \mathfrak{p} \in V(\langle \varphi(\mathfrak{a})\rangle) = V(\mathfrak{a}^e).
\end{aligned}$$

(c). Es claro que $\sqrt{\mathfrak{b}^c} = \sqrt{\mathfrak{b}}^{\,c}$. Sea $Y = V(\mathfrak{b})$ y $\mathfrak{a} = I(\varphi^*(Y))$; luego, $V(\mathfrak{a}) = \overline{\varphi^*(Y)}$. Veamos que $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{b}}^{\,c}$. Si $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{b})$, entonces $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$, por lo que, $\mathfrak{p}^c \in \varphi^*(Y)$. Ahora bien, si $a \in \mathfrak{a}$, entonces $a \in \mathfrak{p}^c$, lo que implica $\varphi(a) \in \mathfrak{p}$; sigue que $\varphi(a) \in I(V(\mathfrak{b}))$, y de esto último, $\varphi(a) \in \sqrt{\mathfrak{b}}$. Por lo tanto,

$$a \in \sqrt{\mathfrak{b}}^{\,c} \tag{2.3.2}$$

Veamos la parte recíproca. Tenemos $\mathfrak{a} = I(\varphi^*(Y))$, tomemos un elemento $\mathfrak{p} \in \varphi^*(Y) = \varphi^*(V(\mathfrak{b}))$, entonces $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1^c$, donde $\mathfrak{b}$ es un ideal de B con $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}_1$; por otro lado, si $b \in \sqrt{\mathfrak{b}}^{\,c}$, entonces $\varphi(b) \in \sqrt{\mathfrak{b}} = I(V(\mathfrak{b}))$. También, como $\mathfrak{p}_1 \in V(\mathfrak{b})$, entonces $\varphi(b) \in \mathfrak{p}_1$, lo que implica $b \in \mathfrak{p}$. Por lo tanto,

$$b \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in \varphi^*(Y)} \mathfrak{p} = I(\varphi^*(Y)) = \mathfrak{a} \tag{2.3.3}$$

Finalmente, de (2.3.2) y (2.3.3) obtenemos que $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{b}}^{\,c}$, y por la afirmación (b) conseguimos

$$\overline{\varphi^*\left(V(\mathfrak{b})\right)} = \overline{\varphi^*(Y)} = V(\mathfrak{a}) = V(\varphi^{-1}(\sqrt{\mathfrak{b}})) = V(\sqrt{\mathfrak{b}^c}) = V(\mathfrak{b}^c).$$

(d). La correspondencia $\operatorname{Spec} B \to V(\operatorname{Nuc}(\varphi))$ dada por $\mathfrak{q} \mapsto \mathfrak{q}^c$ está bien definida ya que $\operatorname{Nuc}(\varphi) \subseteq \mathfrak{q}^c$. A continuación definimos la aplicación $\psi\colon V(\operatorname{Nuc}(\varphi)) \to \operatorname{Spec} B$ dado por $\mathfrak{p} \mapsto \varphi(\mathfrak{p})$. Debido a la inclusión $\operatorname{Nuc}(\varphi) \subseteq \mathfrak{p}$, tenemos

$$(\varphi^* \circ \psi)(\mathfrak{p}) = \varphi^*(\psi(\mathfrak{p})) = \varphi^*(\varphi(\mathfrak{p})) = \varphi(\mathfrak{p})^c = \mathfrak{p}$$

y desde que φ es sobreyectiva tenemos

$$(\psi \circ \varphi^*)(\mathfrak{q}) = \psi(\varphi^*(\mathfrak{q})) = \psi(\mathfrak{q}^c) = \varphi(\mathfrak{q}^c) = \mathfrak{q}.$$

Ahora bien, siendo $\varphi^*\colon \operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ continua, φ^* es también continua sobre $V(\operatorname{Nuc}(\varphi))$. Resta mostrar que ψ es continua. Para esto, consideremos un subconjunto cerrado C de $\operatorname{Spec} B$ y escribimos $C = V(\mathfrak{b})$ para algún ideal $\mathfrak{b}$ de B. No hay dificultad en verificar la igualdad $\psi^{-1}(V(\mathfrak{b})) = V(\mathfrak{b}^c)$.

(e). Por la afirmación (c) tenemos que $\overline{\varphi^*(Y)} = \overline{\varphi^*(V(0))} = V(\operatorname{Nuc}(\varphi))$. Si $\overline{\varphi^*(Y)} = X$, entonces $V(\operatorname{Nuc}(\varphi)) = X = V(0)$; por lo que, $\sqrt{\operatorname{Nuc}(\varphi)} = \sqrt{\langle 0\rangle}$, de aquí, $\operatorname{Nuc}(\varphi) \subseteq \sqrt{\langle 0\rangle}$. Recíprocamente, si $\operatorname{Nuc}(\varphi) \subseteq \sqrt{\langle 0\rangle}$, entonces $X = \operatorname{Spec} A = V(\operatorname{Nuc}(\varphi))$, y por la afirmación ($c$), se tiene $X = \overline{\varphi^*(V(0))} = \overline{\varphi^*(Y)}$.

(f). La sucesión de homomorfismos de anillos $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$ induce la sucesión de aplicaciones continuas $\operatorname{Spec} C \xrightarrow{\psi^*} \operatorname{Spec} B \xrightarrow{\varphi^*} \operatorname{Spec} A$. Ahora bien, si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(C)$, entonces

$$\begin{aligned}(\varphi^* \circ \psi^*)(\mathfrak{p}) &= \varphi^*(\psi^*(\mathfrak{p})) = \varphi^*(\psi^{-1}(\mathfrak{p})) = \varphi^{-1}(\psi^{-1}(\mathfrak{p}))\\ &= (\psi \circ \varphi)^{-1}(\mathfrak{p}) = (\psi \circ \varphi)^*(\mathfrak{p}).\end{aligned}$$

(g). Por hipótesis, los únicos ideales primos de A son $\mathfrak{p}$ y $\{0\}$, esto implica que $\mathfrak{p}$ es un ideal maximal de A y así, $A/\mathfrak{p}$ es un cuerpo. Esto conduce a que el anillo $B = (A/\mathfrak{p}) \times K$ debe tener también sólo dos ideales, es decir, $\mathfrak{q}_1 = \{([a], 0) \,:\, a \in A\}$ y $\mathfrak{q}_2 = \{([0], a) \,:\, a \in K\}$. El homomorfismo $\phi\colon A \to B$ definido por $a \mapsto ([a], a)$ es biyectivo con $\phi^*(\mathfrak{q}_1) = \{0\}$ y $\phi^*(\mathfrak{q}_2) = \mathfrak{p}$ y también es continua.

Por otra parte, ϕ^* no es un homeomorfismo. En el espacio topológico $\operatorname{Spec} B = \{\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2\}$ tenemos que $\{\mathfrak{q}_1\} = V(\mathfrak{q}_2)$ es cerrado y $\mathfrak{q}_1 \nsubseteq \mathfrak{q}_2$; pero, $\phi^*(\mathfrak{q}_1) = \{0\}$ no es cerrado en $\operatorname{Spec} A$, ya que no es un ideal maximal de A. □

Proposición 2.3.7. *Sea A un anillo, S un subconjunto multiplicativo de A y $\varphi\colon A \to A_S$ el homomorfismo canónico. Entonces $\varphi^*\colon \operatorname{Spec}(A_S) \to \operatorname{Spec} A$ es un homeomorfismo de $\operatorname{Spec}(A_S)$ sobre su imagen en $X = \operatorname{Spec} A$. En particular, si $f \in A$, la imagen de $\operatorname{Spec}(A_f)$ en X es $D(f)$.*

Demostración. Veamos la igualdad

$$\operatorname{Im}(\varphi^*) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \,|\, \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}.$$

Si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Im}(\varphi^*)$, entonces $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}^c$, donde $\mathfrak{q}$ es ideal primo de A_S; esto implica que $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$, ya que si $s \in \mathfrak{p} \cap S$, tenemos $s/1 = \varphi(s) \in \mathfrak{q}$ que es un absurdo, pues $s/1$ es una unidad en A_S. Recíprocamente, consideremos $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ con $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$, sabemos que $\mathfrak{p}$ es contraído, o sea, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{ec}$, por lo cual $\mathfrak{p} = \varphi^*(\mathfrak{p}^e)$ y $\mathfrak{p}^e \in \operatorname{Spec}(A_S)$. Luego, las correspondencias

$$\begin{array}{rccc}\varphi^*\colon & \operatorname{Spec}(A_S) & \to & \operatorname{Im}(\varphi^*)\\ & \mathfrak{q} & \mapsto & \mathfrak{q}^c\end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rccc}\Psi\colon & \operatorname{Im}(\varphi^*) & \to & \operatorname{Spec}(A_S)\\ & \mathfrak{p} & \mapsto & \mathfrak{p}^e\end{array}$$

están bien definidas; además

$$(\varphi^* \circ \Psi)(\mathfrak{p}) = \varphi^*(\mathfrak{p}^e) = \mathfrak{p}^{ec} = \mathfrak{p} \quad \text{y} \quad (\Psi \circ \varphi^*)(\mathfrak{q}) = \Psi(\mathfrak{q}^c) = \mathfrak{q}^{ce} = \mathfrak{q}\,.$$

Por tanto, φ^* es una biyección entre $\operatorname{Spec}(A_S)$ y $\operatorname{Im}(\varphi^*)$ cuya inversa es Ψ.

La continuidad de φ^* es consecuencia de la afirmación (b) en la Proposición 2.3.6. Veamos a continuación la continuidad de Ψ. Sea $\mathfrak{b}$ ideal de A_S y afirmamos que

$$\Psi^{-1}(V(\mathfrak{b})) = V(\mathfrak{b}^c) \cap \operatorname{Im}(\varphi^*)\,.$$

Si $\mathfrak{p} \in \Psi^{-1}(V(\mathfrak{b}))$, tenemos $\mathfrak{p}^e \in V(\mathfrak{b})$, o sea, $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}^e$ lo que implica $\mathfrak{b}^c \subseteq \mathfrak{p}^{ec} = \mathfrak{p}$; por tanto, $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{b}^c) \cap \operatorname{Im}(\varphi^*)$. Para la otra inclusión, damos $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{b}^c) \cap \operatorname{Im}(\varphi^*)$, es decir, $\mathfrak{b}^c \subseteq \mathfrak{p}$ y $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$, esto implica que $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}^e = \Psi(\mathfrak{p})$, de donde $\mathfrak{p} \in \Psi^{-1}(V(\mathfrak{b}))$. Finalmente, de las igualdades

$$\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A_S) \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\} = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A_S) \mid f \notin \mathfrak{p}\} = D(f)\,,$$

donde $S = \{1, f, f^2, \ldots\}$, tenemos que $\operatorname{Spec}(A_S)$ es homeomorfo a $D(f)$. □

Definición 2.3.5. Sea S un anillo graduado, definimos el conjunto $\operatorname{Proj} S$ como el conjunto de todos los ideales primos homogéneos $\mathfrak{p}$ de S tal que $S_+ \nsubseteq \mathfrak{p}$. Llamaremos a este conjunto *el espectro proyectivo* de S. Si $\mathfrak{a}$ es un ideal homogéneo de S, definimos el subconjunto $V_+(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj}\, S \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\}$.

Lema 2.3.8. *Sea S un anillo graduado. Entonces,*

(b) $V_+(0) = \operatorname{Proj}\, S$ *y* $V_+(S) = V_+(S_+) = \emptyset$

(b) *si* $\{\mathfrak{a}_i\}_{i\in I}$ *es una familia de ideales de* S, $V_+(\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i) = \bigcap_{i\in I} V_+(\mathfrak{a}_i)$*;*

(c) *si* $\mathfrak{a}$ *y* $\mathfrak{b}$ *son ideales homogéneos en* S, $V_+(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V_+(\mathfrak{a}) \cup V_+(\mathfrak{b})$.

Demostración. Son inmediatos. □

Definición 2.3.6. Del lema anterior, el espectro proyectivo $\operatorname{Proj}\, S$ admite la topología de *Zariski*, es decir, los subconjuntos cerrados son los subconjuntos de la forma $V_+(\mathfrak{a})$ donde $\mathfrak{a}$ es un ideal homogéneo de S.

Observación 2.3.2. Si $f \in S_+$ es un elemento homogéneo, definimos el subconjunto $D_+(f) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj}\, S \mid f \notin \mathfrak{p}\}$. El subconjunto $D_+(f)$ es abierto en $\operatorname{Proj}\, S$, ya es el complemento de $V_+(\langle f\rangle)$. Se verifica fácilmente que la familia $\{D_+(f)\}$ donde f varía en el conjunto de elementos homogéneos de S_+, es una base de abiertos de $\operatorname{Proj}\, S$.

Lema 2.3.9. *Sea S un anillo graduado generado por S_1 como S_0-álgebra y sea $X = \operatorname{Proj} S$. Entonces $X = \bigcup_{f\in S_1} D_+(f)$.*

Demostración. Sea $\mathfrak{p} \in X$ arbitrario, como $S_+ \nsubseteq \mathfrak{p}$, existe un elemento homogéneo $g \in S_+$ tal que $f \notin \mathfrak{p}$, luego como S es generado por S_1 como S_0-álgebra, tenemos $g = \sum \lambda_{\alpha_1\cdots\alpha_k} f_1^{\alpha_1} \cdots f_k^{\alpha_k}$ donde $\sum_{i=1}^k \alpha_i = \partial(f)$; $f_1, .., f_k \in S_1$ y $\lambda_{\alpha_1\cdots\alpha_k} \in S_0$ para todos los índices. Luego como $\mathfrak{p}$ es un ideal, algún sumando $\lambda_{\alpha_1\cdots\alpha_k} f_1^{\alpha_1} \cdots f_k^{\alpha_k} \notin \mathfrak{p}$, y puesto que $\mathfrak{p}$ es primo, no contiene a ningún factor de este producto, en particular $f = f_1 \notin \mathfrak{p}$, por tanto $\mathfrak{p} \in D_+(f)$ donde $f \in S_1$.

□

Lema 2.3.10. *Sea S un anillo graduado. Entonces,* $\operatorname{Proj} S = \emptyset$ *si, y sólo si, cada elemento de S_+ es nilpotente.*

Demostración. Si cada elemento de S_+ es nilpotente entonces cada ideal primo homogéneo contiene a S_+ así $\operatorname{Proj} S = \emptyset$. Recíprocamente, si $\operatorname{Proj} S = \emptyset$, entonces cada primo homogéneo de S contiene a S_+ y por el Corolario 2.2.4, S_+ está contenido en el nilradical de S, así cada elemento de S_+ es nilpotente.

□

Definición 2.3.7. Sea S un anillo graduado y M un S-módulo graduado. Llamaremos *soporte* de M al conjunto

$$Sop(M) = \{\mathfrak{p} \in \text{Proj } S \,|\, M_{(\mathfrak{p})} \neq 0\}.$$

Proposición 2.3.11. *Sea S un anillo graduado generado por S_1 como un S_0-álgebra y sea M un S-módulo graduado de tipo finito. Entonces,*

(a) $Sop(M) = V_+(Anu(M))$

(b) *Si S_1 genera finitamente a S como S_0-álgebra, $M \approx 0$ si, y sólo si, $M_{(\mathfrak{p})} = 0$ para todo $\mathfrak{p} \in$ Proj S.*

Demostración. (a) Tomemos generadores homogéneos $\{m_1, \ldots, m_r\}$ de M. Sea $\mathfrak{p} \in Sop(M)$ tal que $Anu(M) \nsubseteq \mathfrak{p}$, entonces existe un elemento no nulo $\frac{m}{\lambda} \in M_{(\mathfrak{p})}$ y existe un elemento homogéneo $g \in Anu(M)$ tal que $g \notin \mathfrak{p}$, luego $\frac{m}{\lambda} = \frac{gm}{g\lambda} = \frac{0}{\lambda} = 0$, esta contradicción muestra que $Sop(M) \subseteq V_+(Anu(M))$. Recíprocamente tomemos $\mathfrak{p} \in$ Proj S tal que $Anu(M) \subseteq \mathfrak{p}$. Puesto que $Anu(M) = \cap_{i=1}^{n} Anu(m_i)$, un resultado bien conocido para ideales nos dice que, $Anu(m_{i_0}) \subseteq \mathfrak{p}$ para algún i_0 (ver Atiyah-Macdonald, pag. 9, prop. 1.11). Por otro lado, de la inclusión $S_+ \subseteq \mathfrak{p}$, se sigue que existe un elemento $f \in S_1$ tal que $f \notin \mathfrak{p}$. Sea d el grado de m_{i_0}, entonces el elemento $\frac{m_{i_0}}{f^d} \in M_{(\mathfrak{p})}$ es no nulo, en efecto, si $\frac{m_{i_0}}{f^d} = 0$ entonces existe un elemento homogéneo $\lambda \notin \mathfrak{p}$ tal que $\lambda m_{i_0} = 0$, o sea $\lambda \in Anu(m_{i_0}) \subseteq \mathfrak{p}$, que es una contradicción, por tanto $M_{(\mathfrak{p})} \neq 0$.

(b) Si $M \approx 0$ existe un entero $d \geq 0$ tal que $M_k = 0$ para todo $k \geq d$. Dado $\mathfrak{p} \in$ Proj S entonces podemos conseguir un elemento $f \in S_1$ tal que $f \notin \mathfrak{p}$. Ahora tomemos un elemento $\frac{m}{\lambda} \in M_{(\mathfrak{p})}$, entonces $f^k m = 0$ para un entero k suficientemente grande, así $\frac{m}{\lambda} = \frac{f^k m}{f^k \lambda} = 0$. Recíprocamente, supongamos que $M_{(\mathfrak{p})} = 0$ para todo $\mathfrak{p} \in$ Proj S, es decir $Sop(M) = \emptyset$. Si $M = 0$ es resultado es trivial, así asumimos que $Anu(M)$ es propio, por tanto está contenido en al menos un ideal primo homogéneo de S. Por (a), $V_+(Anu(M)) = \emptyset$, esto implica que todos los primos homogéneos que contienen a $Anu(M)$ contienen a S_+, por el Corolario 2.2.4 el radical de $Anu(M)$ contiene a S_+. Supongamos que $f_1, \ldots, f_r \in S_1$ genera a S como S_0-álgebra y $m_1, \ldots, m_s$ son elementos homogéneos que generan a M como S-módulo, digamos que cada m_j tiene grado k_j. Puesto que $S_+ \subseteq \sqrt{Anu(M)}$ existe un entero suficientemente grande tal que $f_i^h \in Anu(M)$ para todo $i = 1, .., r$. Por otro, par cada $d \in \mathbb{Z}$, M_d es generado como un S_0-módulo por elementos de la forma $f_1^{\alpha_1} \cdots f_r^{\alpha_r} m_j$ tal que $k_j + \Sigma_i \alpha_i = d$. Si tomamos un entero k estrictamente mayor que cada k_j donde $j = 1, .., s$ y $d \geq rh + k$, entonces en cada expresión $f_1^{\alpha_1} \cdots f_r^{\alpha_r} m_j$, tendremos que $\alpha_i \geq h$ para algún i, luego $f_i^{\alpha_i} = 0$ y la expresión anterior se anula. Por tanto $M_d = 0$ para todo $d \geq rh + k$, esto prueba que $M \approx 0$. □

Definición 2.3.8. Un subconjunto no vacío Y de un espacio topológico X es llamado *irreducible* si no puede ser expresado como la unión $Y = Y_1 \cup Y_2$ de dos subconjuntos cerrados en Y. El conjunto vacío no es considerado irreducible. Un subconjunto que no es irreducible es llamado *reducible*.

Observación 2.3.3. Cualquier subconjunto abierto no vacío de un espacio irreducible es irreducible y denso.

Observación 2.3.4. Sea Y un subespacio de X. Si $Z \subseteq Y$ es cerrado irreducible en Y, entonces su clausura $\overline{Z}$ de Z en X es también cerrado e irreducible. En efecto, supongamos que $\overline{Z} = Z_1 \cup Z_2$ es la unión de dos subconjuntos cerrados propios en $\overline{Z}$. Entonces $Z = \overline{Z} \cap Y = (Z_1 \cap Y) \cup (Z_2 \cap Y)$; además $Z_i \cap Y \neq Z$, pues de lo contrario, si $Z_i \cap Y = Z$ para algún i, entonces $\overline{Z} \subseteq Z_i \subseteq \overline{Z}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\overline{Z}$ es irreducible.

Definición 2.3.9. Sea X un espacio topológico no vacío. Un subespacio irreducible maximal de X (con respecto a la inclusión) es llamado *componente irreducible*.

Teorema 2.3.12. *Sea X un espacio topológico. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(a) *X posee subespacios irreducibles.*

(b) *X posee componentes irreducibles.*

(c) *Las componentes irreducibles son subconjuntos cerrados.*

(d) *X es la unión de sus componentes irreducibles.*

Demostración. (a). Desde que $X \neq \emptyset$, sea $x \in X$; luego $\{x\}$ es un subespacio irreducible de X.

(b). Veamos que cada $x \in X$ pertenece a un subespacio irreducible maximal. Sea $x \in X$ y consideremos la familia $\mathcal{R}_x$ constituido por todos los subespacios irreducibles de X que contienen a x. $\mathcal{R}_x \neq \emptyset$, pues, $\{x\} \in \mathcal{R}_x$. Ordenamos a $\mathcal{R}_x$ por la inclusión y consideremos una cadena $\{Y_i\}$ en $\mathcal{R}_x$. Sea $E = \bigcup_{i\in I} Y_i$ y veamos que E es irreducible. Para esto tomamos un abierto no vacío U en E, luego $U = E \cap U'$ con U' abierto en X. $U = (\bigcup_{i\in I} Y_i) \cap U' = \bigcup_{i\in I}(Y_i \cap U')$. Veamos que U es conexo. Para esto sean $x, y \in U$; luego existen índices i, j tal que $x \in Y_i \cap U'$, $y \in Y_j \cap U'$. sea $Z = (Y_i \cap U') \cup (Y_j \cap U') = (Y_i \cup Y_j) \cap U'$. Veamos que Z es conexo. Sea $Y_i \subseteq Y_j$, luego $Z = Y_j \cap U'$, pero Y_j es irreducible y $Y_i \cap U'$ es abierto en Y_i, luego Z es conexo y por tanto E es irreducible. De aquí, $\mathcal{R}_x$ es inductivo, y por el lema de Zorn existe un elemento maximal en $\mathcal{R}_x$, el cual es una componente irreducible que contiene a x.

(c). Sea $Y \subseteq X$ una componente irreducible. Veamos que Y es cerrado. Tenemos que $Y \subseteq \overline{Y}$, pero $\overline{Y}$ es irreducible; por tanto, $Y = \overline{Y}$, pues, Y es maximal.

(d). Para cada $x \in X$, sea Y_x la componente irreducible de X conteniendo a x. Entonces $X = \bigcup_{x\in X} Y_x$.

Observación 2.3.5. Si $f\colon X \to Y$ es una aplicación continua y Z es subespacio irreducible de X, entonces $f(Z)$ es irreducible en Y. En efecto, sean U_1 y U_2 subconjuntos abiertos no vacíos de $f(Z)$, entonces $U_i = f(Z) \cap U_i'$, donde U_i' es abierto en Y $(i = 1, 2)$. Es claro que $f^{-1}(U_i) = f^{-1}(f(Z) \cap U_i') \supseteq Z \cap f^{-1}(U_i')$. Desde que $f(Z) \cap U_i' \neq \emptyset$, entonces $Z \cap f^{-1}(U_i') \neq \emptyset$ y por tanto $Z \cap f^{-1}(U_1') \cap f^{-1}(U_2') \neq \emptyset$. Así que $f^{-1}(U_1 \cap U_2) = f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2) \neq \emptyset$, lo que implica $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$.

Definición 2.3.10. Un espacio topológico X es llamado *noetheriano* si satisface la *condición de cadenas descendentes* para subconjuntos cerrados: para cualquier sucesión

$$Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \ldots \supseteq Y_n \supseteq \ldots$$

de subconjuntos cerrados, existe un entero r tal que $Y_r = Y_{r+1} = \cdots$.

Observación 2.3.6. Cualquier subespacio de un espacio noetheriano es noetheriano. En efecto, sea Y subconjunto del espacio noetheriano X y consideremos una cadena $Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq \ldots \subseteq Z_n \subseteq \ldots$ de subconjuntos cerrados de Y. Entonces $\overline{Z}_1 \subseteq \overline{Z}_2 \subseteq \ldots \subseteq \overline{Z}_n \subseteq \ldots$ es una cadena de cerrados en X. Desde que X es noetheriano, existe i tal que $\overline{Z}_i = \overline{Z}_{i+1} = \cdots$. Por otra parte, $Z_i = \overline{Z}_i \cap Y$ para todo i. De aquí, $Z_i = Z_{i+1} = \cdots$.

Proposición 2.3.13. *Sea X un espacio topológico noetheriano. Entonces Todo subconjunto cerrado de X puede ser expresado como unión finita de subconjuntos cerrados irreducibles de X. Además, si $Y_i \not\supseteq Y_j$ para todo $i \neq j$, entonces los Y_i son determinados de manera única. Ellos son llamados* componentes irreducibles *de X.*

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ la colección de subconjuntos cerrados de X que no se pueden expresar como unión finita de subconjuntos cerrados irreducibles de X y supongamos que $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Entonces existe un elemento minimal $C \in \mathcal{F}$; como C no es irreducible, entonces existen subconjuntos cerrados propios C_1, C_2 de X con $C = C_1 \cup C_2$. Pero $C_i \notin \mathcal{F}$; así que C_i es unión finita de subconjuntos cerrados irreducibles de X. De aquí, C también lo es, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, todo conjunto cerrado Y puede ser expresado como unión $Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_r$ de subconjuntos irreducibles; además, podemos asumir que $Y_i \not\supseteq Y_j$ para todo $i \neq j$.

Supongamos que $Y = Y_1' \cup \ldots \cup Y_s'$ es otra tal representación. Entonces $Y_i = \bigcup_{j=1}^{s} (Y_j' \cap Y_i)$. Pero Y_i es irreducible, entonces $Y_i \subseteq Y'_{j(i)}$ para algún $j(i)$. Similarmente, $Y'_{j(i)} \subseteq Y_k$ para algún k. Entonces $Y_i \subseteq Y_k$, de donde $i = k$ y $Y_i = Y'_{j(i)}$. También cada Y_j' es igual a algún $Y_{i(j)}$. □

Proposición 2.3.14. *Un subconjunto abierto de un espacio noetheriano Y es denso si y sólo si interseca a toda componente irreducible de Y.*

Demostración. Sea $Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_n$ la descomposición de Y en sus componentes irreducibles. Entonces $Y_i \not\subseteq \bigcup_{j \neq i} Y_j$ y $U_i = Y \setminus \bigcup_{j \neq i} Y_j \neq \emptyset$. Desde que $\emptyset = U_i \cap (Y \setminus Y_i)$, se sigue que $U_i \subseteq Y_i$ con U_i abierto. Luego, si U es denso en X, entonces $\emptyset \neq U \cap U_i \subseteq U \cap Y_i$. Por tanto, U intersecta a cada componente irreducible de Y.

Recíprocamente, supongamos que U intersecta a cada componente irreducible de Y y sea U' un subconjunto abierto no vacío de Y; luego existe i tal que $U' \cap Y_i \neq \emptyset$. Desde que Y_i es irreducible tenemos que $(U' \cap Y_i) \cap (U \cap Y_i) \neq \emptyset$, de donde, $U' \cap U \neq \emptyset$ y U es denso en Y. □

Proposición 2.3.15. *(a) Si Y es un subconjunto de un espacio topológico X, entonces $dim(Y) \leq dim(X)$.*

(b) Si X es un espacio topológico el cual es cubierto por una familia de subconjuntos abiertos $\{U_i\}_{i \in I}$, entonces $dim(X) = sup\{dim(U_i)\}$.

(c) Si Y es un subconjunto cerrado de un espacio irreducible X de dimensión finita, y si $dim(Y) = dim(X)$, entonces $Y = X$.

Demostración. (a) Es suficiente mostrar que una cadena de cerrados irreducibles de longitud n en Y, produce una cadena de cerrados irreducibles en X de longitud n. Sea una cadena $W_0 \subsetneq W_1 \subsetneq \ldots \subsetneq W_n$ una cadena de cerrados irreducibles en Y, podemos escribir $W_i = Y_i \cap Y$, donde cada Y_i es cerrado en X. Tenemos que $\overline{W}_0 \subseteq \overline{W}_1 \subseteq \ldots \subseteq \overline{W}_n$ es una cadena de cerrados irreducibles de X; además, esta cadena es estricta. En efecto, supongamos que $\overline{W}_i = \overline{W}_{i+1}$, entonces $W_i = \overline{W}_i^Y = \overline{W}_i \cap Y = \overline{W}_{i+1} \cap Y = \overline{W}_{i+1}^Y = W_{i+1}$, lo cual es una contradicción.

(b) Sea X un espacio topológico el cual es cubierto por una familia de subconjuntos abiertos $\{U_i\}_{i\in I}$. De la parte (a) se tiene que $dim(U_i) \leq dim(X)$, entonces se tiene que $sup\{dim(U_i)\} \leq dim(X)$.

Veamos que $dim(X) \leq sup\{dim(U_i)\}$. Sea $Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \ldots \subsetneq Y_n$ una cadena de cerrados irreducibles de X. Desde que $X = \bigcup_{i\in I} U_i$, existe $j \in I$ tal que $U_j \cap Y_0 \neq \emptyset$. Entonces $Y_0 \cap U_j \subsetneq Y_1 \cap U_j \subsetneq \ldots \subsetneq Y_n \cap U_j$ es una cadena de subconjuntos cerrados irreducibles de U_j. Veamos a continuación que estas inclusiones son propias. Supongamos que $Y_i \cap U_j = Y_{i+1} \cap U_j$ para algún i. Entonces, desde que $U_j \cap Y_{i+1}$ es subconjunto abierto de Y_{i+1}, entonces es denso en Y_{i+1}. Por tanto, $Y_{i+1} = \overline{Y_i \cap U_j}^{Y_{i+1}} \subsetneq \overline{Y}_i^{Y_{i+1}}$. Desde que Y_i es cerrado en Y_{i+1}, entonces $Y_{i+1} \subsetneq \overline{Y}_i = Y_i$. Pero esto contradice el hecho que $Y_i \subsetneq Y_{i+1}$.

Entonces $dim(X) \leq dim(U_j)$ para todo j. Por lo tanto, $dim(X) \leq sup\{dim(U_i)\}$.

(c) Supongamos que Y es un subconjunto cerrado de un espacio topológico irreducible de dimensión finita y que $dim(X) = dim(Y)$. Entonces Y tiene dimensión finita. Sea $dim(Y) = n$ y que $Y \neq X$. Consideremos una cadena $Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \ldots \subsetneq Y_n$ de subconjuntos cerrados irreducibles de Y, que también es una cadena de cerrados irreducibles de X. Ahora bien, $Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \ldots \subsetneq Y_n \subseteq Y \subsetneq X$. Por tanto, $Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \ldots \subsetneq Y_n \subsetneq X$ es una cadena de cerrados irreducibles de X. Entonces $dim(X) \geq n + 1 > dim(Y)$, lo cual es una contradicción. Así, $Y = X$. □

2.4 Variedades y Morfismos

Definición 2.4.1. Sea k un cuerpo. Se define el *n-espacio afín* sobre k denotado por $\mathbb{A}^n_k$ o simplemente por $\mathbb{A}^n$ como el conjunto de n-tuplas de elementos de k. Un elemento $p \in \mathbb{A}^n$ es llamado *punto*, y si $p = (a_1, \ldots, a_n)$ con $a_i \in k$, entonces los a_i son llamados *coordenadas* de p. El espacio $\mathbb{A}^1$ es llamado *recta afín* y $\mathbb{A}^2$ se llama *plano afín.*

Sea $\mathcal{P}(\mathbb{A}^n, k)$ el álgebra de funciones polinomiales de $\mathbb{A}^n$ en k y consideremos el anillo de polinomios en n variables $A_n := k[x_1, \ldots, x_n]$; si k es infinito, se sabe que $\mathcal{P}(\mathbb{A}^n, k) \cong k[x_1, \ldots, x_n]$ como k-álgebras. Por tanto, cuando k es infinito, un polinomio en n variables será visto como una función $f\colon \mathbb{A}^n \to k$; así, de esta manera, $f(p) = f(a_1, \ldots, a_n)$, donde $f \in A_n$ y $p \in \mathbb{A}^n$. Dado $f \in A_n$, podemos considerar el conjunto de *ceros* de f, es decir, $Z(f) = \{p \in k^n \mid f(p) = 0\}$. Más generalmente, si T es un subconjunto de A, definimos el *conjunto de ceros* de T como sigue

$$Z(T) = \{p \in k^n \mid f(p) = 0 \text{ para todo } f \in T\}.$$

Si $\mathfrak{a}$ es el ideal de A_n generado por T, es claro que $Z(\mathfrak{a}) = Z(T)$; además, desde que A_n es un anillo noetheriano, el ideal $\mathfrak{a}$ tiene un número finito de generadores $f_1, \ldots, f_r$. Así, $Z(T) = Z(\{f_1, \ldots, f_r\})$ o denotado simplemente como $Z(T) = Z(f_1, \ldots, f_r)$. Un subconjunto Y de $\mathbb{A}^n$ es llamado *conjunto algebraico* si existe un subconjunto T de A_n

tal que $Y = Z(T)$, equivalentemente, un subconjunto Y de $\mathbb{A}^n$ es un conjunto algebraico si $Y = Z(\mathfrak{a})$ para algún ideal $\mathfrak{a}$ de A_n. Cuando $Y = Z(T)$ es un conjunto algebraico, diremos que Y está definido por T o que T define a Y. Si $Y = Z(f)$, entonces Y es llamado *hipersuperficie*, una hipersuperficie en $\mathbb{A}^2$ es llamado *curva afín plana*; una hipersuperficie de grado 1 es llamado hiperplano y un hiperplano en $\mathbb{A}^2$ es llamado *recta afín*.

Proposición 2.4.1. *La unión de dos conjuntos algebraicos es un conjunto algebraico. La intersección de cualquier familia de conjuntos algebraicos es un conjunto algebraico. El conjunto vacío y todo el espacio afín son conjuntos algebraicos.*

Demostración. Si $Y_1 = Z(\mathfrak{a}_1)$ e $Y_2 = Z(\mathfrak{a}_2)$, entonces $Y_1 \cup Y_2 = Z(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2)$. También, si $\{Y_i = Z(\mathfrak{a}_i)\}_{i\in I}$ es una familia de conjuntos algebraicos, entonces $\bigcap_{i\in I} Y_i = Z(\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i)$. Finalmente, $Z(1) = \emptyset$ y $Z(0) = \mathbb{A}^n$. □

Definición 2.4.2. Definimos la *topología de Zariski* de $\mathbb{A}^n$, tomando los conjuntos abiertos como los complementos de conjuntos algebraicos. Esta es una topología, pues, según la proposición anterior, la intersección de dos conjuntos abiertos es abierto, la unión arbitraria de conjuntos abiertos es abierto; además, el conjunto vacío y todo el espacio son conjuntos abiertos. Una *variedad algebraica afín* o simplemente *variedad* es un subconjunto cerrado irreducible de $\mathbb{A}^n$ (con la topología inducida). Un subconjunto abierto de una variedad afín es llamada *variedad casi afín*.

Definición 2.4.3. Para cualquier subconjunto Y de $\mathbb{A}^n$, el conjunto

$$I_a(Y) = \{f \in A_n \mid f(p) = 0 \text{ para todo } p \in Y\}$$

es un ideal radical de A_n llamado *ideal afín* de Y. En lo que sigue denotaremos a este ideal por $I(Y)$ y utilizaremos la notación $I_a(Y)$ cuando sea necesario.

Observación 2.4.1. De la definición es claro que $I(\emptyset) = A_n$; además si $p = (a_1, \ldots, a_n)$, se tiene la igualdad $I(p) = \langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n\rangle$. Por otra parte, si k es infinito, tenemos que $I(\mathbb{A}^n) = \{0\}$.

Teorema 2.4.2 (Ceros de Hilbert)**.** *Si k es algebraicamente cerrado, entonces para cualquier ideal $\mathfrak{a}$ de A_n se tiene*

$$I(Z(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}\,.$$

Demostración. Ver Zariski, Samuel [16], volumen II, cap. VII, Teor. 14, pag. 164. □

Definición 2.4.4. Sea $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ un conjunto algebraico afín. Definimos el *anillo coordenado* o *anillo de funciones* $A(Y)$ de Y como $A_n/I(Y)$. Si k es infinito, sabemos que $I(\mathbb{A}^n) = \{0\}$; así que $\mathcal{P}(Y, k) \cong A(Y)$; por tanto, un elemento $f \in A(Y)$ también será visto como una función polinomial $f : Y \to k$.

Proposición 2.4.3. *Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado. Una k-álgebra B es isomorfa al anillo coordenado de algún conjunto algebraico en $\mathbb{A}^n$ para algún n si, y sólo si, B es una k-álgebra reducida finitamente generada (una álgebra B es reducida si no tiene elementos nilpotentes no nulos).*

Demostración. Se sabe que un anillo A es reducido si y sólo si el ideal $\{0\}$ es un ideal radical. Ahora bien, si $B \cong A(Y)$ para algún conjunto algebraico $Y \subseteq \mathbb{A}^n$, entonces $B \cong k[x_1, \ldots, x_n]/I(Y)$ es una k-álgebra reducida finitamente generada ya que $I(Y)$ es un ideal radical. Recíprocamente, si B es una k-álgebra reducida finitamente generada, podemos escribir $B = k[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{a}$ para algún ideal radical $\mathfrak{a}$. Si $Y = Z(\mathfrak{a})$, entonces $A(Y) = B$. □

Observación 2.4.2. Si Y es una variedad afín, entonces $A(Y)$ es un dominio de integridad; además, $A(Y)$ es una k-álgebra finitamente generada. Recíprocamente, si k es algebraicamente cerrado, cualquier k-álgebra B finitamente generada el cual es un dominio, es el anillo de funciones de alguna variedad afín. Más precisamente, si $B = A_n/\mathfrak{a}$ con $\mathfrak{a}$ ideal primo, considerando $Y = Z(\mathfrak{a})$ se tiene que $B = A(Y)$.

A continuación hablaremos brevemente sobre las variedades proyectivas.

Definición 2.4.5. Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado. Definimos el *n-espacio proyectivo* sobre k, denotado por $\mathbb{P}^n_k$ o simplemente por $\mathbb{P}^n$, como el conjunto de clases de equivalencia de $(n+1)$-tuplas $(a_0, \ldots, a_n)$ de elementos de k, no todos ceros, bajo la relación dado por $(a_0, \ldots, a_n) \sim (\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n)$ para todo $\lambda \in k$, $\lambda \neq 0$. Un elemento de $\mathbb{P}^n$ es llamado *punto*; si P es un punto de $\mathbb{P}^n$, denotaremos por $P := (a_0 : \ldots : a_n)$, donde $(a_0, \ldots, a_n)$ es un representante de dicha clase de equivalencia.

Observación 2.4.3. Consideremos el anillo de polinomios $S = k[x_0, \ldots, x_n]$ como un anillo graduado. Si $f \in S$ es un polinomio, no podemos verlo como función en $\mathbb{P}^n$, debido a que las coordenadas homogéneas no son únicas. Sin embargo, si f es un polinomio homogéneo de grado d, entonces $f(\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n) = \lambda^d f(a_0, \ldots, a_n)$; así que, para que f sea nulo o no, sólo dependerá de cada clase de equivalencia $p = (a_0 : \ldots : a_n)$. Por tanto, f nos dá una función de $\mathbb{P}^n$ a $\{0, 1\}$ por $f(p) = 0$ si $f(a_0, \ldots, a_n) = 0$ y $f(p) = 1$ si $f(a_0, \ldots, a_n) \neq 0$.

Definición 2.4.6. Consideremos los *ceros* de un polinomio homogéneo, es decir, $Z_+(f) = \{p \in \mathbb{P}^n \mid f(p) = 0\}$. Si T es cualquier conjunto de elementos homogéneos de S, definimos el *conjunto de ceros* de T como

$$Z_+(f) = \{p \in \mathbb{P}^n \mid f(p) = 0 \text{ para todo } f \in T\}.$$

Si $\mathfrak{a}$ es el ideal homogéneo de S generado por T, definimos $Z_+(\mathfrak{a}) = Z_+(T)$. Desde que S es noetheriano, $Z_+(T) = Z_+(f_1, \ldots, f_r)$ para un número finito de elementos $f_1, \ldots, f_r \in T$.

Definición 2.4.7. Un subconjunto Y de $\mathbb{P}^n$ es un *conjunto algebraico* si existe un conjunto T de elementos homogéneos de S tal que $Y = Z_+(T)$, es decir, $Y = Z_+(\mathfrak{a})$, donde $\mathfrak{a}$ es ideal homogéneo de S.

Proposición 2.4.4. *La unión de dos conjuntos algebraicos es un conjunto algebraico. La intersección de cualquier familia de conjuntos algebraicos es un conjunto algebraico. El conjunto vacío y todo el espacio son conjuntos algebraicos.*

Demostración. Desde que el producto de ideales homogéneos es homogéneos, sigue que la unión de conjuntos algebraicos es algebraico. Además, es claro que la intersección arbitraria de conjuntos algebraicos es también algebraico. Finalmente, como 0 y 1 son elementos homogéneos, el conjunto vacío y todo el espacio son conjuntos algebraicos. □

Definición 2.4.8. Definimos la *topología de Zariski* en $\mathbb{P}^n$, donde los conjuntos abiertos son los complementos de los conjuntos algebraicos.

Definición 2.4.9. Sea $f \in A_{n+1}$ homogéneo de grado positivo. Definimos el *abierto básico proyectivo* como el conjunto $U_f = \{p \in \mathbb{P}^n \mid f(p) = 0\}$.

Definición 2.4.10. Una *variedad algebraica proyectiva* (o simplemente variedad) es un conjunto algebraico irreducible en $\mathbb{P}^n$, con la topología inducida. Un subconjunto abierto de una variedad proyectiva es llamado *variedad casi proyectiva.* La *dimensión* de una variedad proyectiva o casi proyectiva es su dimensión como espacio topológico.

Definición 2.4.11. Si Y es cualquier subconjunto de $\mathbb{P}^n$, definimos el *ideal homogéneo* de Y en S, denotado por $I(Y)$ como el ideal generado por el siguiente conjunto $\{f \in S \mid f \text{ es homogéneo y } f(p) = 0 \text{ para todo } p \in Y\}$. Si Y es un conjunto algebraico, definimos el *anillo coordenado homogéneo* de Y como $S(Y) = S/I(Y)$.

Definición 2.4.12. Si $f \in S$ es un polinomio homogéneo lineal, entonces el conjunto de ceros de f es llamado *hiperplano.* En particular, denotamos el conjunto de ceros de x_i por H_i para $i = 0, 1, \ldots, n$. Sea U_i el conjunto abierto $\mathbb{P}^n \setminus H_i$. Entonces $\mathbb{P}^n$ es cubierto por los conjuntos abiertos U_i, pues, si $p = (a_0 : \ldots : a_n)$ es un punto, entonces algún $a_i \neq 0$; de aquí, $p \in U_i$. Definimos la aplicación $\varphi_i \colon U_i \to k^n$ por $\varphi_i(a_0 : \ldots : a_n) = (\frac{a_0}{a_i}, \ldots, \frac{a_{i-1}}{a_i}, \frac{a_{i+1}}{a_i}, \ldots \frac{a_n}{a_i})$. Notemos también que φ_i está bien definida desde que las componentes $\frac{a_j}{a_i}$ son independientes de la elección de las coordenadas homogéneas.

Definición 2.4.13. Sea $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ el anillo de polinomios, entonces $S = A[x_0] = k[x_0, \ldots, x_n]$. Expresemos a A y B por las graduaciones canónicas $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ y $B = \bigoplus_{n\geq 0} B_n$; además, sea $B^h = \bigcup_{n\geq 0} B_n$. Sean las aplicaciones $h \colon A \to S$, $d \colon S \to A$ definidas por $f \mapsto x_0^{\partial(f)} f(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0})$ y $g \mapsto g(1, x_1, \ldots, x_n)$, respectivamente. Tales aplicaciones son llamadas *homogenización* y *deshomogenización.*

Sea $\mathfrak{a}$ ideal de A. Se llama *homogenización* del ideal $\mathfrak{a}$ en S, denotado por $h(\mathfrak{a})$, al ideal de S generado por $\{h(f) \mid f \in \mathfrak{a}\}$. Entonces $h(\mathfrak{a})$ es un ideal homogéneo de S. Dado un ideal $\mathfrak{b}$ de S, la deshomogenización $d(\mathfrak{b})$ de $\mathfrak{b}$ es el ideal $\{d(g) \mid g \in \mathfrak{b}\}$.

Proposición 2.4.5. *La aplicación φ_i es un homeomorfismo de U_i con su topología inducida sobre k^n con la topología de Zariski.*

Demostración. Es claro que φ_i es biyectiva. Así, es suficiente mostrar que los cerrados de U_i se biyectan con los cerrados de k^n. Asumiremos a continuación que $\varphi_i = \varphi_0$.

Sea $Y \subseteq k^n$ un subconjunto cerrado, o sea $Y = Z(\mathfrak{a})$ para algún ideal $\mathfrak{a}$ de A. Afirmamos que $\varphi_0^{-1}(Z(\mathfrak{a})) = U_0 \cap Z(h(\mathfrak{a}))$. Sea $p = (a_0 : \ldots : a_n) \in \varphi_0^{-1}(Z(\mathfrak{a}))$, entonces $(\frac{a_1}{a_0}, \ldots, \frac{a_n}{a_0}) \in Z(\mathfrak{a})$. Si g es un generador de $h(\mathfrak{a})$, entonces $g = h(f)$ para algún $f \in \mathfrak{a}$, entonces $g(p) = a_0^{\partial(f)} f(\frac{a_1}{a_0}, \ldots, \frac{a_n}{a_0}) = 0$; de aquí, $p \in U_0 \cap Z(h(\mathfrak{a}))$. Recíprocamente, sea $p = (a_0 : \ldots : a_n) \in U_0 \cap Z(h(\mathfrak{a}))$ y sea $a = (\frac{a_1}{a_0}, \ldots, \frac{a_n}{a_0})$. Si $f \in \mathfrak{a}$, entonces $0 = h(f)(p) = a_0^{\partial(f)} f(\frac{a_1}{a_0}, \ldots, \frac{a_n}{a_0})$, que implica $f(a) = 0$; de aquí, $p \in \varphi_0^{-1}(Z(\mathfrak{a}))$.

Veamos finalmente que φ_0 es una aplicación cerrada. Sea $Y \subseteq U_0$ un conjunto cerrado, sabemos que $Y = \overline{Y} \cap U_0$, donde $\overline{Y}$ es la cerradura de Y en $\mathbb{P}^n$. Tenemos que $\overline{Y} = Z(\mathfrak{b})$ para algún ideal homogéneo $\mathfrak{b}$ de S. Afirmamos que $\varphi_0(Y) = Z(d(\mathfrak{b}))$. En efecto, sea $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \varphi_0(Y)$, entonces $(1 : a_1 : \ldots : a_n) \in Y \subseteq \overline{Y}$. Por tanto, si $f \in d(\mathfrak{b})$, entonces $f = d(g)$, donde $g \in \mathfrak{b}$ es un polinomio homogéneo. Luego $f(a) = d(g)(a) = d(g)(a_1, \ldots, a_n) = g(1, a_1, \ldots, a_n) = 0$. Recíprocamente, si $a = (a_1, \ldots, a_n) \in Z(d(\mathfrak{b}))$, se tiene $\varphi_0(a) = (1 : a_1 : \ldots : a_n)$. Si $g \in \mathfrak{b}$ es homogéneo, $g(1 : a_1 : \ldots : a_n) = d(g)(a_1, \ldots, a_n) = 0$. Por lo tanto, $a \in \varphi_0(Y)$. □

Corolario 2.4.6. *Si Y es una variedad proyectiva (resp. casi proyectiva), entonces Y es cubierto por los conjuntos abiertos $Y \cap U_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, los cuales son homeomorfos a variedades afines (resp. casi afines) vía la aplicación φ_i definida anteriormente.*

Demostración. Consecuencia de la proposición anterior; además, debe notarse que aplicaciones continuas lleva irreducibles en irreducibles. □

Definición 2.4.14. Sea U un subconjunto abierto no vacío de una variedad afín Y. Una función $\varphi\colon U \to k$ es *regular en el punto* $p \in U$ si existen funciones $f, g \in A(Y)$, tal que g es no nulo, $p \in U_g \subseteq U$ y $\varphi = f/g$ en U_g, es decir, $\varphi(p) = f(p)/g(p)$ para todo $p \in U_g$. Decimos que φ es *regular* en U si es regular en todo punto de U.

Sea U un subconjunto abierto no vacío de una variedad proyectiva Y. Una función $\varphi\colon U \to k$ es *regular en el punto* $p \in U$ si existen funciones $f, g \in S(Y)$ homogéneas del mismo grado, tal que g es no nulo, $p \in U_g \subseteq U$ y $\varphi = f/g$ en U_g, es decir, $\varphi(p) = f(p)/g(p)$ para todo $p \in U_g$. Decimos que φ es *regular* en U si es regular en todo punto de U. Para una variedad U, denotamos por $\mathcal{O}(U)$ al conjunto de funciones regulares en U.

Observación 2.4.4. Sea U una variedad y φ una función regular en U. Para cada $p \in U$, existe $U_g \subseteq U$ tal que $\varphi = f/g$ en U_g; de esta manera $U = \bigcup_{p \in U} U_{g_p}$, y desde que U es compacto, podemos escribir $U = U_{g_1} \cup \ldots \cup U_{g_n}$.

Proposición 2.4.7. *Sea U abierto de una variedad Y, $p \in U$ y $\varphi\colon U \to k$ una función. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *φ es regular en p.*

(b) *Existen un abierto V con $p \in V \subseteq U$ y $f, g \in A(Y)$ (en el caso proyectivo, $f, g \in S(Y)$ homogéneos del mismo grado) con $g(q) \neq 0$ para todo $q \in V$ tal que $\varphi = f/g$ en V.*

Demostración. Es inmediato a partir de la definición. □

Proposición 2.4.8. *Sea Y una variedad. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(a) *$\mathcal{O}(U)$ es una k-álgebra para todo subconjunto abierto U de Y.*

(b) *Si $U' \subseteq U$ son abiertos en Y, entonces para todo $\varphi \in \mathcal{O}(U)$, la restricción $\varphi' = \varphi\big|_{U'}$ es regular en U' y $\rho_{UU'}\colon \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(U')$ definida por $\varphi \mapsto \varphi'$ es un homomorfismo de k-álgebras. Además, si $U'' \subseteq U' \subseteq U$ son subconjuntos abiertos de Y, se tiene $\rho_{UU''} = \rho_{U'U''} \circ \rho_{UU'}$ y $\rho_{UU} = id_{\mathcal{O}(U)}$, donde hacemos $\rho_{U\emptyset} = 0$.*

(c) *Si $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ es unión de abiertos y $\rho_{UU_i}(\varphi) = \rho_{UU_i}(\psi)$ para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{O}(U)$ y para todo $i \in I$, entonces $\varphi = \psi$. Además, si para todo $\varphi_i \in \mathcal{O}(U_i)$ se cumple $\varphi_i\big|_{U_i \cap U_j} = \varphi_j\big|_{U_i \cap U_j}$, entonces existe $\varphi \in \mathcal{O}(U)$ tal que $\varphi\big|_{U_i} = \varphi_i$.*

Demostración. (a). Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{O}(U)$. Desde que el conjunto de funciones de U en k es una k-álgebra, es suficiente ver que $\varphi_1 + \varphi_2$ y $\varphi_1\varphi_2$ son elementos de $\mathcal{O}(U)$. Dado $p \in U$, existen $f_i, g_i \in A(Y)$ (en el caso proyectivo $f_i, g_i \in S(Y)$ son homogéneos y del mismo grado) tal que $p \in U_{g_i} \subseteq U$ y $\varphi_i = f_i/g_i$ en U_{g_i} $(i = 1, 2)$. Tenemos que $U_{g_1g_2} = U_{g_1} \cap U_{g_2} \subseteq U$ y $p \in U_{g_1g_2}$; además, $\varphi_1 = f_1g_2/g_1g_2$ y $\varphi_2 = g_1f_2/g_1g_2$. Luego, dado $q \in U_{g_1g_2}$ se tiene

$$\begin{aligned}(\varphi_1 + \varphi_2)(q) = \varphi_1(q) + \varphi_2(q) &= \frac{f_1(q)}{g_1(q)} + \frac{f_2(q)}{g_2(q)} \\ &= \frac{f_1(q)g_2(q) + g_1(q)f_2(q)}{g_1(q)g_2(q)} = \frac{(f_1g_2 + g_1f_2)(q)}{(g_1g_2)(q)}\end{aligned}$$

O sea, $\varphi_1 + \varphi_2 = (f_1g_2 + g_1f_2)/(g_1g_2)$ en $U_{g_1g_2}$. También,

$$(\varphi_1\varphi_2)(q) = \varphi_1(q)\varphi_2(q) = \frac{f_1(q)}{g_1(q)} \cdot \frac{f_2(q)}{g_2(q)} = \frac{f_1(q)g_1(q)}{f_2(q)g_2(q)} = \frac{(f_1g_1)(q)}{(f_2g_2)(q)}$$

Por otra parte,

$$(-\varphi_1)(q) = -\varphi_1(q) = -f_1(q)/g_1(q)$$

lo que implica

$$(\varphi_2 + \varphi_1)(q) = \varphi_2(q) - \varphi_1(q) = \frac{f_2(q)}{g_2(q)} - \frac{f_1(q)}{g_1(q)} = \frac{(f_2g_1 - g_2f_1)(q)}{(g_1g_2)(q)}$$

Por tanto, $\varphi_1 + \varphi_2$, $\varphi_1 - \varphi_2$ y $\varphi_1\varphi_2$ son elementos de $\mathcal{O}(U)$.

(b). Sea U' un subconjunto abierto de U y $p \in U'$, desde que $\varphi \in \mathcal{O}(U)$, existen $f, g \in A(Y)$ (en el caso homogéneo $f, g \in S(Y)$ homogéneos y del mismo grado) tal que $p \in U_g$ y $\varphi = f/g$ en U_g; pero entonces $U_g \cap U' \subseteq U'$ y $\varphi = f/g$ en $U_g \cap U'$. Por otra parte, sean $U'' \subseteq U' \subseteq U$ subconjuntos abiertos de X, poniendo $\rho_{U\emptyset} = 0$ y $\rho_{UU} = id_{\mathcal{O}(U)}$, veamos que $\rho_{U'U''} \circ \rho_{UU'} = \rho_{UU''}$. En efecto,

$$\begin{aligned}(\rho_{U'U''} \circ \rho_{UU'})(\varphi) &= \rho_{U'U''}(\circ\rho_{UU'}(\varphi)) = \rho_{U'U''}(\varphi\big|_{U'}) \\ &= (\varphi\big|_{U'})\big|_{U''} = \varphi\big|_{U''} = \rho_{UU''}(\varphi)\end{aligned}$$

(c). Sea $p \in U$ y veamos que $\varphi(p) = \psi(p)$. Por hipótesis existe i tal que $p \in U_i$ y $(\varphi\big|_{U_i})(p) = (\psi\big|_{U_i})(p)$; se sigue que

$$\varphi(p) = (\varphi\big|_{U_i})(p) = (\psi\big|_{U_i})(p) = \psi(p)$$

Finalmente, si las funciones $\varphi_i \in \mathcal{O}(U_i)$ son tales que $\varphi_i\big|_{U_i \cap U_j} = \varphi_j\big|_{U_i \cap U_j}$, definiendo $\varphi\colon U \to k$ por $\varphi = \varphi_i$ si $p \in U_i$; se sigue que φ es regular en U. □

Teorema 2.4.9. *Sea $g \in A(Y)$ (en el caso proyectivo $g \in S(Y)$ homogéneo de grado positivo). Toda función regular $\varphi \in \mathcal{O}(U_g)$ se puede expresar como $\varphi = f/g^s$ en U_g, donde $s \in \mathbb{Z}^+$ y $f \in A(Y)$ (en el caso proyectivo $f \in S(Y)$ homogéneo con $\partial(f) = s\partial(g)$).*

Demostración. Siguiendo la Observación 2.4.4 hagamos $U_g = U_{g_1} \cup \ldots \cup U_{g_n}$. Para cada $i = 1, \ldots, n$ tenemos que $\varphi = f_i/g_i$ en U_{g_i}, donde $f_i, g_i \in A(Y)$ (en el caso proyectivo $f_i, g_i \in S(Y)$ son homogéneos del mismo grado). Luego

$$f_ig_j/g_ig_j = f_jg_i/g_jg_i \quad \text{en} \quad U_{g_ig_j}.$$

Lo que implica $f_ig_j = f_jg_i$ en $U_{g_ig_j}$ y por tanto, $g_ig_j(f_ig_j - f_jg_i) = 0$ en Y.

Sea $f_i' = f_ig_i$, $g_i' = g_i^2$ para $i = 1, \ldots, n$. Desde que $\varphi = f_ig_i/g_i^2$ en $U_{g_i^2} = U_{g_i'}$, entonces tenemos que $f_i'g_j' = f_j'g_i'$ en Y, y también $U_g = U_{g_1'} \cup \ldots \cup U_{g_n'}$; por tanto $g \in \sqrt{\langle g_1', \ldots, g_n' \rangle}$ (en el caso proyectivo g es no constante). Sea $s \in \mathbb{Z}^+$ tal que $g^s = \sum_{i=1}^n p_ig_i'$ (en el caso proyectivo, los p_ig_i' son homogéneos con $s\partial(g) = \partial(p_i) + \partial(g_i')$). Hacemos a continuación $f = \sum_{i=1}^n p_if_i'$ y conseguimos

$$g^sf_j' = \sum_{i=1}^n (p_ig_i')f_j' = \sum_{i=1}^n (p_if_i')g_j' = fg_j'.$$

De donde,

$$\varphi = f_j'/g_j' = f/g^s \quad \text{en} \quad U_{g_j'} = U_{g_j^2} = U_{g_j} \quad \text{para cada} \quad j = 1, \ldots, n.$$

Por lo tanto, $\varphi = f/g^s$ en U_g. □

Corolario 2.4.10. *Sea Y una variedad afín o proyectiva. Se cumplen:*

(a) *En el caso afín, $\mathcal{O}(U_g) \cong A(Y)_g$.*

(b) *En el caso proyectivo, $\mathcal{O}(U_g) \cong (S(Y)_g)_0$.*

Demostración. Consecuencia directa del teorema anterior. □

Corolario 2.4.11. *Si Y es un conjunto algebraico afín, entonces*

$$\mathcal{O}(Y) \cong A(Y).$$

Demostración. Resulta inmediato al tomar $Y = U_1$ en el ítem (a) del corolario anterior. □

Definición 2.4.15. Sea Y una variedad y sea Z un subespacio irreducible de Y. Sea $\mathcal{F}(Z)$ la colección de subconjuntos abiertos U de Y tal que $U \cap Z \neq \emptyset$. Si U_1, U_2 son elementos de $\mathcal{F}(Z)$, la irreducibilidad de Z implica que $U_1 \cap U_2$ es también elemento de $\mathcal{F}$. Consideremos la familia de pares (U, φ), donde $U \in \mathcal{F}$, $\varphi \in \mathcal{O}(U)$ y en esta colección definimos la relación $(U_1, \varphi_1) \sim (U_1, \varphi_1)$ si existe $U \in \mathcal{F}(Z)$ con $U \subseteq U_1 \cap U_2$ tal que $\varphi_1\big|_U = \varphi_1\big|_U$. Es fácil verificar que esta relación es de equivalencia. El conjunto de estas clases de equivalencia es denotado por $\mathcal{O}_{Z,Y}$ y un elemento $\langle U, \varphi \rangle \in \mathcal{O}_{Z,Y}$ es llamado *función regular germen* en Z.

Definiendo en $\mathcal{O}_{Z,Y}$ las operaciones de adición y multiplicación como

$$\langle U_1, \varphi_1 \rangle + \langle U_2, \varphi_2 \rangle = \langle U_1 \cap U_2, \varphi_1 + \varphi_2 \rangle \text{ y } \langle U_1, \varphi_1 \rangle . \langle U_2, \varphi_2 \rangle = \langle U_1 \cap U_2, \varphi_1\varphi_2 \rangle$$

Entonces $\mathcal{O}_{Z,Y}$ se convierte en una k-álgebra. Consideremos el conjunto $\mathfrak{m}_{Z,Y} = \{\langle U, \varphi \rangle \in \mathcal{O}_{Z,Y} \,|\, \varphi = 0 \text{ en } U \cap Z\}$, entonces se puede verificar fácilmente que $\mathfrak{m}_{Z,Y}$ es un ideal propio de $\mathcal{O}_{Z,Y}$.

Observación 2.4.5. Sea V un subconjunto abierto de una variedad Y tal que $V \cap Z \neq \emptyset$. Si $\langle U, \varphi \rangle \in \mathcal{O}_{Z,Y}$, se tiene que $U \cap Z \neq \emptyset$, donde U es abierto en Y y $\varphi \in \mathcal{O}(U)$. Ahora bien, desde que Z es irreducible, entonces $(U \cap V) \cap Z \neq \emptyset$ y también la restricción de φ a $U \cap V$ es regular, lo que implica $\langle U, \varphi \rangle = \langle U \cap V, \varphi \rangle$. Por lo tanto, $\mathcal{O}_{Z,Y} = \mathcal{O}_{Z,V}$.

Proposición 2.4.12. *$\mathcal{O}_{Z,Y}$ es un anillo local con ideal maximal $\mathfrak{m}_{Z,Y}$.*

Demostración. Si $\langle U, \varphi\rangle \in \mathcal{O}_{Z,Y} \setminus \mathfrak{m}_{Z,Y}$, entonces $\varphi(p) \neq 0$ para algún $p \in U \cap Z$. Como $\varphi \in \mathcal{O}(U)$, existen $f, g \in A(Y)$ (resp. homogéneos del mismo grado en $S(Y)$) con $g \neq 0$ tal que $p \in U_g \subseteq U$ y $\varphi = f/g$ en U_g. Como $g(p) \neq 0$, entonces $U_g \cap Z \neq \emptyset$ y así $U_g \in \mathcal{F}(Z)$; por tanto, $U \cap U_g \in \mathcal{F}(Z)$ y $\langle U, \varphi\rangle = \langle U_g, \varphi\rangle$. También, desde que $\varphi(p) \neq 0$, entonces $f(p) \neq 0$ y $U_f \cap W \neq \emptyset$, o sea $U_f \in \mathcal{F}(Z)$; además, $U_{fg} = U_f \cap U_g \in \mathcal{F}(Z)$ y se tiene

$$\langle U, \varphi\rangle.\langle U_f, g/f\rangle = \langle U_g, f/g\rangle.\langle U_f, g/f\rangle = \langle U_{fg}, 1\rangle$$

Todo lo anterior nos dice que $\mathcal{O}_{Z,Y} \setminus \mathcal{U}(\mathcal{O}_{Z,Y}) \subseteq \mathfrak{m}_{Z,Y}$. Por tanto, $\mathfrak{m}_{Z,Y}$ es el único ideal maximal de $\mathcal{O}_{Z,Y}$. □

Observación 2.4.6. Si $Z = \{p\}$, denotamos por $\mathcal{O}_{p,Y}$ o también por $\mathcal{O}_p(Y)$ en lugar de $\mathcal{O}_{Z,Y}$ y lo llamaremos *anillo local* de Y en el punto p y su ideal maximal es denotado por $\mathfrak{m}_{p,Y}$ o también $\mathfrak{m}_p(Y)$.

Definición 2.4.16. Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado. Una variedad algebraica sobre k o simplemente una variedad, es cualquier variedad afín, casi afín, proyectiva o casi proyectiva definido anteriormente. Si X e Y son dos variedades, un *morfismo* $\varphi\colon X \to Y$ es una aplicación continua tal que para cada conjunto abierto $V \subseteq Y$, y para cada función regular $f\colon V \to k$, la función $f \circ \varphi\colon \varphi^{-1}(V) \to k$ es regular.

Claramente la composición de dos morfismos es un morfismo, así tenemos una categoría, que denotaremos por $\mathfrak{Var}(k)$.

Lema 2.4.13. *Sea Y una hipersuperficie en $\mathbb{A}^n$ dado por la ecuación $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Entonces $\mathbb{A}^n - Y$ es isomorfo a la hipersuperficie H en $\mathbb{A}^{n+1}$ dado por $x_{n+1}f = 1$. En particular, $\mathbb{A}^n - Y$ es afín, y su anillo de coordenadas es $k[x_1, \ldots, x_n]_f$.*

Demostración. Definimos $\varphi\colon H \to \mathbb{A}^n$ por $(a_1, \ldots, a_{n+1}) \mapsto (a_1, \ldots, a_n)$. Claramente φ es un morfismo inyectivo con imagen $\mathbb{A}^n - Y$. Luego, resta probar que φ^{-1} es un morfismo de $\mathbb{A}^n - Y$ en H, pero esto se sigue desde que $\varphi^{-1}(a_1, \ldots, a_n) = (a_1, \ldots, a_n, 1/f(a_1, \ldots, a_n))$. □

Proposición 2.4.14. *Sobre una variedad Y, existe una base de abiertos de Y consistiendo subconjuntos abiertos y afines.*

Demostración. Se sigue del lema anterior. □

Capítulo 3

Haces y Esquemas

3.1 Haces y Morfismos entre Haces

Definición 3.1.1. Sea X un espacio topológico. Denotemos por $\mathfrak{Top}(X)$ a la categoría formada por subconjuntos abiertos de X, donde los morfismos entre estos objetos son las inclusiones; mas precisamente, $\mathrm{Hom}(V,U)$ sólo consta de la inclusión $V \hookrightarrow U$ si $V \subseteq U$, y $\mathrm{Hom}(V,U) = \emptyset$ si $V \nsubseteq U$. Sea $\mathfrak{C}$ la categoría de conjuntos, un *prehaz* $\mathcal{F}$ de conjuntos sobre X, es un funtor contravariante de $\mathfrak{Top}(X)$ en la categoría $\mathfrak{C}$, tal que $\mathcal{F}(\emptyset)$ consiste de un sólo elemento. Si $U \subseteq V$ son dos abiertos de X e $\imath\colon U \hookrightarrow V$ es la inclusión, denotaremos por ρ_{VU} a la aplicación $\mathcal{F}(\imath)\colon \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$. Por otra parte, si $\mathfrak{C}$ es la categoría de grupos, módulos, anillos o álgebras, entonces las aplicaciones ρ_{VU} son homomorfismos de dichas categorías, y diremos que $\mathcal{F}$ es un *prehaz* de grupos, módulos, anillos o álgebras, respectivamente.

Si $\mathcal{F}$ es un prehaz de grupos, entonces $\mathcal{F}(\emptyset)$ es el grupo trivial cero, denotado simplemente por 0. En lo que sigue, cada vez que nos referimos a un prehaz sobre X estaremos entendiendo que se trata de un prehaz de grupos abelianos. Si $\mathcal{F}$ es un prehaz sobre X y $U \subseteq X$ es un subconjunto abierto, la asignación $V \mapsto \mathcal{F}(V)$ para todo conjunto abierto $V \subseteq U$, determina obviamente un prehaz sobre U, este es llamado *prehaz restricción* de $\mathcal{F}$ sobre U y es denotado por $\mathcal{F}\big|_U$; esto es, si $V_1 \subseteq V_2 \subseteq U$, hacemos $\imath_{V_1V_2}\colon V_1 \hookrightarrow V_2$ y $\mathcal{F}\big|_U(\imath_{V_1V_2}) = \rho_{V_2V_1}$. Para una mejor terminología, para un prehaz $\mathcal{F}$ sobre X, haremos referencia a $\mathcal{F}(U)$ como el conjunto de *secciones* de $\mathcal{F}$ sobre U, algunas veces usaremos la notación $\Gamma(U,\mathcal{F})$ para denotar al grupo $\mathcal{F}(U)$. Llamaremos a ρ_{UV} el *homomorfismo restricción* de U a V y mayormente escribiremos $s\big|_V$ en lugar de $\rho_{UV}(s)$ cuando $s \in \mathcal{F}(U)$.

A continuación establecemos la definición de haz.

Definición 3.1.2. Un prehaz $\mathcal{F}$ sobre X es llamado *haz*, si para todo subconjunto abierto U de X y todo cubrimiento $U = \bigcup_{i\in I} U_i$, se cumplen:

(i) Si $s \in \mathcal{F}(U)$ es tal que $s\big|_{U_i} = 0$ para todo $i \in I$, entonces $s = 0$.

(ii) Para cada $i \in I$ sea $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$. Si $s_i\big|_{U_i\cap U_j} = s_j\big|_{U_i\cap U_j}$ para todo $i,j \in I$, entonces existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s\big|_{U_i} = s_i$ para todo i.

Observación 3.1.1. El elemento s de la condición (ii) es único. En efecto, sea $s' \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s'\big|_{U_i} = s_i$ para todo i; luego para cada $i \in I$ se cumple $(s - s')\big|_{U_i} = 0$; se sigue de (i) que $s = s'$. Cuando se tiene la primera igualdad en la condición (ii), también diremos que los elementos s_i y s_j son *compatibles*.

Ejemplo 3.1.1. Sea X una variedad afín o proyectiva sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k. Dado un conjunto abierto $U \subseteq X$, sea $\mathcal{O}(U)$ el k-álgebra de funciones regulares de U en k y para cada abierto $V \subseteq U$ sea $\rho_{UV} : \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V)$ la restricción natural de aplicaciones. Entonces $\mathcal{O}$ es un haz de k-álgebras en X, llamamos a $\mathcal{O}$ el *haz de funciones regulares* en X (ver Proposición 2.4.8)

Ejemplo 3.1.2. (Un prehaz que no es haz). Consideremos $\mathbb{C}$ con la topología usual y para cada abierto U de $\mathbb{C}$, sea

$$\mathcal{F}(U) = \{f : U \to \mathbb{C} \mid f \text{ es holomorfa y acotada}\} ,$$

junto con las restricciones usuales $\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$. Es claro que $\mathcal{F}$ es un prehaz de $\mathbb{C}$-álgebras. Para cada entero positivo n, sea $U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < n\}$, entonces $\mathbb{C} = \bigcup_{n\geq 1} U_n$ y las funciones $f_n : U_n \to \mathbb{C}$ definidas por $f_n(z) = z$ son tales que $f_n \in \mathcal{F}(U_n)$. También tenemos que $f_n\big|_{U_m\cap U_n} = f_m\big|_{U_m\cap U_n}$; pero el teorema de Liouville nos dice que no existe $f \in \mathcal{F}(\mathbb{C})$ tal que $f\big|_{U_n} = f_n$ para todo $n \geq 1$. Por tanto, $\mathcal{F}$ es un prehaz que no es un haz.

Ejemplo 3.1.3. Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ prehaces de grupos sobre un espacio topológico X, es fácil ver que la correspondencia $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{G}(U)$ es un prehaz de grupos llamado *prehaz producto tensorial* de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$. Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son haces, en general el prehaz producto tensorial de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ no es un haz(ver Litaca [8], pag. 37).

Ejemplo 3.1.4. Sea $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ una familia de haces sobre X, el *prehaz suma directa* es definido como $U \mapsto \bigoplus_{i\in I} \mathcal{F}_i(U)$. Si I es un conjunto finito se prueba facilmente que este prehaz es un haz. Sin embargo cuando I no es finito, este prehaz no es en general un haz. Por ejemplo, si tomamos $X = \mathbb{Z}$ con la topología discreta y considaremos el haz $\mathcal{F}$ de anillos sobre X, definido en cada subconjunto $U \subseteq \mathbb{Z}$, por

$$\mathcal{F}(U) = \{f : U \to \mathbb{Z} \,|f \text{ es una aplicación}\} .$$

entonces $\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}$ no es un haz. En efecto, notemos que si $U \neq \emptyset$, $\mathcal{F}(U)$ es un anillo no nulo. Tomemos para cada $k \in \mathbb{Z}$, un elemento $f_k \in \mathcal{F}(\{k\})$ tal que $f_k \neq 0$. Para cada $k \in \mathbb{Z}$ consideremos las secciones $s_k = (s_{ik})_{i\in\mathbb{Z}} \in \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(\{k\})$ tal que

$$s_{ik} = \begin{cases} f_k\,, & \text{si} \quad i = k\,, \\ 0\,, & \text{si} \quad i \neq k\,. \end{cases}$$

De manera trivial, los s_k son compatibles. Ahora bien, si este prehaz fuera un haz, existiría una sección global $t = (t_i)_i \in \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(\mathbb{Z})$ tal $t\big|_{\{k\}} = s_k$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, lo que implica que $t_i\big|_{\{k\}} = s_{ik}$ para todo $i, k \in \mathbb{Z}$. Puesto que t tiene soporte finito, existe $j \in \mathbb{Z}$ tal que $t_j = 0$, y si tomamos $k = j$, tendremos $0 = t_j\big|_{\{k\}} = s_{kk} = f_k \neq 0$, lo cual es absurdo.

Este ejemplo también muestra que el límite directo de haces no es necesariamente un haz.

Definición 3.1.3. Si $\mathcal{F}$ es un prehaz en X y $p \in X$, definimos el *tallo* $\mathcal{F}_p$ de $\mathcal{F}$ en p como el límite directo de los grupos $\mathcal{F}(U)$, donde U varía en la familia de abiertos de X conteniendo p, relativo al sistema de homomorfismos ρ_{VU} para $U \subseteq V$. Los elementos de $\mathcal{F}_p$ son llamados *gérmenes* de $\mathcal{F}$ en p, y son denotados por $\langle U, s\rangle$, donde U es un entorno abierto de p y $s \in \mathcal{F}(U)$. Dos tales gérmenes $\langle U, s\rangle$ y $\langle V, t\rangle$ son iguales si existe un entorno abierto W de p con $W \subseteq U \cap V$ tal que $s\big|_W = t\big|_W$; además, la operación en este grupo es definida como sigue

$$\langle U, s\rangle + \langle V, t\rangle = \langle U \cap V, s\big|_{U\cap V} + t\big|_{U\cap V}\rangle .$$

El elemento neutro en este grupo es el germen $\langle U, 0\rangle$, donde 0 denota el elemento neutro de $\mathcal{F}(U)$; también el inverso de $\langle U, s\rangle$ es el germen $\langle U, -s\rangle$.

Ejemplo 3.1.5. En el caso de una variedad X y su haz de funciones regulares $\mathcal{O}$, el tallo $\mathcal{O}_p(X) = \mathcal{O}_p$ en p, es precisamente el anillo local de X en el punto p (ver Observación 2.4.6).

Observación 3.1.2. Sea $\mathcal{F}$ un haz sobre X y sea U un abierto de X. Si $s \in \mathcal{F}(U)$ es una sección tal que $s_p = 0$ para todo $p \in U$, entonces $s = 0$. En efecto, si $\langle U, s\rangle = s_p = 0$ para todo $p \in U$, entonces podemos conseguir un cubrimiento abierto de U formado por entornos $V \subseteq U$ de p tal que $s|_V = 0$, luego por la propiedad de haz, $s = 0$.

Observación 3.1.3. Sea $\mathcal{F}$ un haz sobre X y sea U un abierto de X. Si $p \in U$, entonces $(\mathcal{F}|_U)_p \cong \mathcal{F}_p$. En efecto, el homomorfismo $(\mathcal{F}|_U)_p \to \mathcal{F}_p$ dado por $\langle V, s\rangle \mapsto \langle V, s\rangle$ donde $V \subseteq U$, es un isomomorfismo con inversa $\langle W, s\rangle \mapsto \langle W \cap U, s\rangle$.

Definición 3.1.4. El *soporte* de un haz $\mathcal{F}$ sobre un espacio topológico X es el conjunto de puntos $p \in X$ tal que $\mathcal{F}_p \neq 0$. El soporte de $\mathcal{F}$ será denotado por $Sop(\mathcal{F})$.

Lema 3.1.6. *Sea $\mathcal{F}$ un haz sobre X y sea U un subconjunto abierto de X. Entonces $Sop(\mathcal{F}|_U) = Sop(\mathcal{F}) \cap U$.*

Demostración. Se sigue de inmediato de la definición de soporte de haz y del isomorfismo $(\mathcal{F}|_U)_p \cong \mathcal{F}_p$. □

Definición 3.1.5. Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ prehaces en X. Un *morfismo de prehaces* $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es una familia de homomorfismos de grupos abelianos $\varphi(U)\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$, donde U es un subconjunto abierto de X, tal que estos homomorfismos son compatibles con las restricciones de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$; es decir, siempre que tenemos $V \subseteq U$, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi(U)"] \arrow[d, "\rho_{UV}"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\rho'_{UV}"] \\
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "\varphi(V)"] & \mathcal{G}(V)
\end{tikzcd}$$

siendo ρ y ρ' las restricciones en $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$, respectivamente. Un *morfismo* entre los haces $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ es un morfismo de prehaces $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$. Decimos que un morfismo φ es un *isomorfismo*, si $\varphi(U)\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ es un isomorfismo para cada abierto U de X. Si $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ y

$\psi\colon \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ son dos morfismos de prehaces (resp. haces), la *composición* de φ y ψ es el morfismo de prehaces (resp. haces) $\psi\circ\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{H}$ difinido como $(\psi\circ\varphi)(U) := \psi(U)\circ\varphi(U)$ para todo abierto U de X.

Los prehaces de grupos abelianos sobre X junto con los morfismos de prehaces forman una categoría que denotaremos por $\mathfrak{Preh}(X)$. Asimismo, denotaremos por $\mathfrak{Hac}(X)$ a la categoría de haces de grupos abelianos sobre X.

Observación 3.1.4. Un morfismo de prehaces $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ sobre X induce para cada punto $p \in X$ un homomorfismo en los tallos, $\varphi_p\colon \mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p$ definido por $\varphi_p\langle U, s\rangle := \langle U, \varphi(U)(s)\rangle$. Veamos la buena definición, si $\langle U, s\rangle = \langle V, t\rangle$, entonces existe un entorno abierto W de p con $W \subseteq U \cap V$ y tal que $s\big|_W = t\big|_W$, luego

$$\varphi(U)(s)\big|_W = \varphi(W)(s\big|_W) = \varphi(W)(t\big|_W) = \varphi(V)(t)\big|_W\,,$$

el cual implica $\langle U, \varphi(U)(s)\rangle = \langle V, \varphi(V)(t)\rangle$. Para mostrar que φ_p es un homomorfismo de grupos, tomemos $\langle U, s\rangle, \langle V, t\rangle \in \mathcal{F}_p$, luego

$$\begin{aligned}
\varphi_p(\langle U, s\rangle + \langle V, t\rangle) &= \varphi_p(U\cap V, s\big|_{U\cap V} + t\big|_{U\cap V}) \\
&= \big\langle U\cap V, \varphi(U\cap V)(s\big|_{U\cap V} + t\big|_{U\cap V})\big\rangle \\
&= \big\langle U\cap V, \varphi(U\cap V)(s\big|_{U\cap V}) + \varphi(U\cap V)(t\big|_{U\cap V})\big\rangle \\
&= \big\langle U\cap V, \varphi(U)(s)\big|_{U\cap V} + \varphi(V)(t)\big|_{U\cap V}\big\rangle \\
&= \big\langle U, \varphi(U)(s)\big\rangle + \big\langle V, \varphi(V)(t)\big\rangle \\
&= \varphi_p\langle U, s\rangle + \varphi_p\langle V, t\rangle.
\end{aligned}$$

La siguiente proposición muestra que el isomorfismo de haces es una propiedad local.

Proposición 3.1.7. *Sea $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de haces en un espacio topológico X. Entonces φ es un isomorfismo si y sólo si $\varphi_p\colon \mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p$ es un isomorfismo para cada $p \in X$.*

Demostración. Consideremos $p \in X$ un punto arbitrario y veamos que $\varphi_p\colon \mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p$ es un isomorfismo. Verifiquemos en principio que φ_p es inyectiva, sea $\langle U, s\rangle \in \mathcal{F}_p$ tal que $\varphi_p\langle U, s\rangle = \langle X, 0\rangle$, entonces tenemos que $\langle U, \varphi(U)(s)\rangle = \langle X, 0\rangle$, de donde existe un entorno abierto W de p, contenido en U tal que

$$0\big|_W = \varphi(U)(s)\big|_W = \varphi(W)(s\big|_W)\,.$$

Ahora bien, como $\varphi(W)$ es monomorfismo, debemos tener $s\big|_W = 0$. Por lo tanto, $\langle U, s\rangle = \langle X, 0\rangle$ mostrando que φ_p es inyectiva.

A continuación veamos que φ_p es sobreyectiva. Tomemos $\langle U, t\rangle \in \mathcal{G}_p$, desde que $\varphi(U)$ es sobreyectiva existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\varphi(U)(s) = t$; de esta manera tenemos que

$$\langle U, t\rangle = \langle U, \varphi(U)(s)\rangle = \varphi_p\langle U, s\rangle\,,$$

mostrando que φ_p es sobreyectiva.

Recíprocamente, supongamos que φ_p es un isomorfismo para todo $p \in X$ y veamos que φ es un isomorfismo. Fijemos un abierto U de X y veamos que $\varphi(U)$ es inyectiva; para esto sea $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\varphi(U)(s) = 0$ en $\mathcal{G}(U)$. Entonces dado $p \in U$,

$$\varphi_p\langle U, s\rangle = \langle U, \varphi(U)(s)\rangle = \langle U, 0\rangle .$$

Desde que φ_p es inyectiva, $\langle U, s\rangle = \langle U, 0\rangle$; así que existe un entorno abierto W_p de p con $W_p \subseteq U$ tal que $s\big|_{W_p} = 0$. Ahora bien, desde que $U = \bigcup_{p\in U} W_p$ y $\mathcal{F}$ es un haz, entonces $s = 0$ y $\varphi(U)$ es inyectiva. Veamos ahora que $\varphi(U)$ es sobreyectiva. Sea $t \in \mathcal{G}(U)$, un punto $p \in U$ y consideremos $\langle U, t\rangle \in \mathcal{G}_p$. Desde que φ_p es sobreyectiva, existe un germen $\langle V_p', s'(p)\rangle \in \mathcal{F}_p$ tal que

$$\langle U, t\rangle = \varphi_p\langle V_p', s'(p)\rangle = \left\langle V_p', \varphi(V_p')(s'(p))\right\rangle .$$

Entonces existe un entorno abierto V_p de p con $V_p \subseteq V_p' \cap U$ tal que

$$t\big|_{V_p} = \varphi(V_p')(s'(p))\big|_{V_p} = \varphi(V_p)(s'(p)\big|_{V_p}) .$$

Haciendo $s(p) = s'(p)\big|_{V_p}$ para cada $p \in U$, tenemos $\varphi(V_p)(s(p)) = t\big|_{V_p}$. Veamos a continuación que $s(p)\big|_{V_p\cap V_q} = s(q)\big|_{V_p\cap V_q}$ para todo $p, q \in U$, en efecto,

$$\varphi(V_p \cap V_q)(s(p)\big|_{V_p\cap V_q}) = \varphi(V_p)(s(p))\big|_{V_p\cap V_q} = (t\big|_{V_p})\big|_{V_p\cap V_q} = t\big|_{V_p\cap V_q}.$$

También se tiene que

$$\varphi(V_p \cap V_q)(s(q)\big|_{V_p\cap V_q}) = \varphi(V_q)(s(q))\big|_{V_p\cap V_q} = (t\big|_{V_q})\big|_{V_p\cap V_q} = t\big|_{V_p\cap V_q}.$$

Desde que $\varphi(V_p \cap V_q)$ es inyectiva, se sigue que $s(p)\big|_{V_p\cap V_q} = s(q)\big|_{V_p\cap V_q}$. Por tanto, $U = \bigcup_{p\in U} V_p$ con $s(p) \in \mathcal{F}(V_p)$ para todo $p \in U$ y $s(p)\big|_{V_p\cap V_q} = s(q)\big|_{V_p\cap V_q}$; desde que $\mathcal{F}$ es un haz, existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s\big|_{V_p} = s(p)$ para todo $p \in U$. Por otra parte,

$$\varphi(U)(s)\big|_{V_p} = \varphi(V_p)(s\big|_{V_p}) = \varphi(V_p)(s(p)) = t\big|_{V_p} .$$

Finalmente tenemos que los abiertos V_p cubren a U, las secciones $t, \varphi(U)(s)$ están en $\mathcal{G}(U)$ y $\varphi(U)(s)\big|_{V_p} = t\big|_{V_p}$ para todo $p \in U$. Ahora bien, ya que $\mathcal{G}$ es un haz, $\varphi(U)(s) = t$, esto muestra que $\varphi(U)$ es sobreyectiva, por consiguiente, $\varphi(U)$ es un isomorfismo, y desde que U es arbitrario, se sigue que φ es un isomorfismo. □

A continuación trataremos sobre los $\mathcal{B}$-prehaces y $\mathcal{B}$-haces, veremos que ellos se extienden de manera natural a un prehaz y haz respectivamente.

Definición 3.1.6. Sea X un espacio topológico y $\mathcal{B}$ una base de abiertos de X, consideremos la categoría $\mathfrak{B}$ cuyos objetos son los elementos de $\mathcal{B}$ y los morfismos son las inclusiones $V \hookrightarrow U$. Un $\mathcal{B}$-*prehaz* $\mathcal{F}$ de grupos abelianos sobre X es un funtor contravariante de $\mathfrak{B}$ en la categoría de grupos abelianos. Esto es, para cada par de abiertos básicos $V \subseteq U$, se tiene un homomorfismo $\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ satisfaciendo las siguientes condiciones:

(i) $\rho_{UU} = id_{\mathcal{F}(U)}$ para todo $U \in \mathcal{B}$.

(ii) $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$ para todo $U, V, W \in \mathcal{B}$ tal que $W \subseteq V \subseteq U$.

Si además se cumplen las condiciones:

(iii) Dado un abierto básico U y un cubrimiento $\{U_i\}_{i \in I}$ de U por abiertos básicos; si $s \in \mathcal{F}(U)$ es tal que $\rho_{UU_i}(s) = 0$ para todo i, entonces $s = 0$.

(iv) Dado un abierto básico U y un cubrimiento $\{U_i\}_{i \in I}$ de U por abiertos básicos; si $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ es tal que $\rho_{U_iV}(s_i) = \rho_{U_jV}(s_j)$ para todo abierto básico $V \subseteq U_i \cap U_j$ y para todo par de índices i, j, entonces existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\rho_{UU_i}(s) = s_i$ para todo i.

Entonces $\mathcal{F}$ es llamado $\mathcal{B}$-*haz* de grupos abelianos. Análogamente se define un $\mathcal{B}$-*prehaz* y un $\mathcal{B}$-*haz* de anillos.

Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ dos $\mathcal{B}$-prehaces sobre X, un *morfismo* de $\mathcal{B}$-prehaces $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ consiste de homomorfismos $\varphi(U)\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ para todo $U \in \mathcal{B}$, tal que para cada inclusión $V \subseteq U$ de abiertos básicos, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi(U)"] \arrow[d, "\rho_{UV}"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\rho'_{UV}"] \\
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "\varphi(V)"] & \mathcal{G}(V)
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, donde ρ y ρ' son las restricciones en $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$, respectivamente. Un morfismo entre los $\mathcal{B}$-haces $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ es un morfismo de $\mathcal{B}$-prehaces $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$. Decimos que un morfismo φ es un *isomorfismo* si $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ es un isomorfismo para cada abierto $U \in \mathcal{B}$.

En lo que sigue, X será un espacio topológico, $\mathcal{B}$ una base de abiertos de X y los $\mathcal{B}$-prehaces tendrán valores en grupos abelianos, y lo mismo para los $\mathcal{B}$-haces.

Proposición 3.1.8. *Si $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{B}$-prehaz sobre X, entonces $\mathcal{F}$ se extiende a un prehaz $\mathcal{F}'$ sobre X (esto quiere decir: si $U \in \mathcal{B}$, entonces $\mathcal{F}(U) \cong \mathcal{F}'(U)$). Más aún, si $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{B}$-haz, entonces $\mathcal{F}$ se extiende a un haz sobre X.*

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{B}$-prehaz sobre X y fijemos un abierto no vacío U de X. Desde que $\{\mathcal{F}(V), \rho_{VW}\}_{V,W \subseteq U}$ es un sistema proyectivo, definimos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}'(U) &= \varprojlim_{V \subseteq U,\ V \in \mathcal{B}} \mathcal{F}(V) \\
&= \left\{ \begin{array}{c} \text{el conjunto de familias } (f_V)_{V \subseteq U, V \in \mathcal{B}} \in \prod_{V \subseteq U, V \in \mathcal{B}} \mathcal{F}(V) \text{ tal} \\ \text{que } \rho_{VW}(f_V) = f_W \text{ siempre que } W \subseteq V \subseteq U \text{ con } V, W \in \mathcal{B} \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

y también $\mathcal{F}'(\emptyset) = 0$. Sean dos abiertos $U' \subseteq U$ de X, definimos el homomorfismo $\rho'_{UU'}\colon \mathcal{F}'(U) \to \mathcal{F}'(U')$ por $(f_V)_{V \subseteq U, V \in \mathcal{B}} \mapsto (f_V)_{V \subseteq U', V \in \mathcal{B}}$. Es inmediato verificar que $\rho'_{UU} = id_{\mathcal{F}'(U)}$ y $\rho'_{UU''} = \rho'_{U'U''} \circ \rho'_{UU'}$ para tres abiertos $U'' \subseteq U' \subseteq U$ de X; de esta manera $\mathcal{F}'$ es un prehaz de grupos abelianos. Veamos ahora que $\mathcal{F}'$ es una extensión de $\mathcal{F}$, en efecto, si $U \in \mathcal{B}$, la proyección $\pi_U : \mathcal{F}'(U) \to \mathcal{F}(U)$ dado por $(f_V)_{V\subseteq U, V\in\mathcal{B}} \mapsto f_U$ es un isomorfismo cuya inversa es el homomorfismo $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}'(U)$ definido por $f \mapsto \big(\rho_{UV}(f)\big)_{V\subseteq U, V\in\mathcal{B}}$, por tanto $\mathcal{F}'(U) \cong \mathcal{F}(U)$.

Supongamos ahora que $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{B}$-haz, veamos que el prehaz $\mathcal{F}'$ es un haz, en efecto, sea U un abierto de X y $\{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de U, tomemos $s = (f_V)_{V\subseteq U, V\in\mathcal{B}} \in \mathcal{F}'(U)$ tal que $\rho'_{UU_i}(s) = 0$ para todo $i \in I$, esto implica que $f_V = 0$ para todo $V \in \mathcal{B}$ tal que $V \subseteq U_i$. Mostremos a continuación que $s = 0$, para esto fijemos un elemento $V \in \mathcal{B}$ tal que $V \subseteq U$; es evidente que V es cubierto por la familia de abiertos básicos W tal que $W \subseteq V \cap U_i$ con $i \in I$, además $\rho_{VW}(f_V) = f_W = 0$ para todo W del cubrimiento de V, luego por la condición (iii) de la definición de $\mathcal{B}$-haz, $f_V = 0$, por tanto $s = 0$. Consideremos ahora para cada $i \in I$, elementos $s_i = (f^i_V)_{V\subseteq U_i, V\in\mathcal{B}} \in \mathcal{F}'(U_i)$ tal que $s_i\big|_{U_i\cap U_j} = s_j\big|_{U_i\cap U_j}$ para todo i, j; esto implica que $f^i_W = f^j_W$ para todo $W \in \mathcal{B}$ tal que $W \subseteq U_i \cap U_j$; ahora bien, tomemos como antes un elemento $V \in \mathcal{B}$ tal que $V \subseteq U$ y el cubrimiento de V formado por los abiertos básicos W tal que $W \subseteq V \cap U_i$ con $i \in I$. Consideremos dos abiertos básicos W y W' de esta familia y un abierto básico $Z \subseteq W \cap W'$, entonces $\rho_{WZ}(f^i_W) = f^i_Z = f^j_Z = \rho_{WZ}(f^j_{W'})$, entonces por la condición (iv) de la definición de $\mathcal{B}$-haz, existe $f_V \in \mathcal{F}(V)$ tal que $\rho_{VW}(f_V) = f^i_W$ para todo abierto básico W con $W \subseteq V \cap U_i$. Así conseguimos una familia $s = (f_V)_{V\subseteq U, V\in\mathcal{B}}$, para ver que $s \in \mathcal{F}'(U)$ debemos verificar que $\rho_{VV'}(f_V) = f_{V'}$ para abiertos básicos $V' \subseteq V$, en efecto, tomemos $W \in \mathcal{B}$ tal que $W \subseteq V' \cap U_i$, entonces

$$\rho_{V'W}\big(\rho_{VV'}(f_V)\big) = \rho_{V'W} \circ \rho_{VV'}(f_V) = \rho_{VW}(f_V) = f^i_W = \rho_{V'W}(f_{V'}) \,.$$

Ahora bien, como los abiertos W cubren a V', la condición (i) de la definición de $\mathcal{B}$-haz implica que $\rho_{VV'}(f_V) = f_{V'}$, por tanto $s \in \mathcal{F}'(U)$; finalmente veamos que $s\big|_{U_i} = s_i$ para todo i, tomemos un abierto básico $V \subseteq U_i$, desde que $\rho_{VW}(f_V) = f^i_W = \rho_{VW}(f^i_V)$ para todo abierto básico W con $W \subseteq V \cap U_i$, se tiene $f_V = f^i_V$, esto implica que $s\big|_{U_i} = s_i$. De esta manera $\mathcal{F}'$ es un haz. □

Proposición 3.1.9. *Sea $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de $\mathcal{B}$-prehaces sobre X. Entonces existe un morfismo de prehaces $\varphi'\colon \mathcal{F}' \to \mathcal{G}'$ que extiende a φ. Además, si $\psi\colon \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ es otro morfismo de $\mathcal{B}$-prehaces y $id_{\mathcal{F}}\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ es el morfismo identidad, entonces $(\psi\circ\varphi)' = \psi'\circ\varphi'$ y $(id_{\mathcal{F}})' = id_{\mathcal{F}'}$.*

Demostración. Consideremos como en la proposición anterior los prehaces $\mathcal{F}'$ y $\mathcal{G}'$ que resultan de extender $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$, respectivamente. Dado un abierto U de X, definimos $\varphi'(U)\colon \mathcal{F}'(U) \to \mathcal{G}'(U)$ dado por $(f_V)_{V\subseteq U, V\in\mathcal{B}} \mapsto \big(\varphi(V)(f_V)\big)_{V\subseteq U, V\in\mathcal{B}}$; es evidente $\varphi'(U)$ que es homomorfismo de grupos. Tomemos dos abiertos $U' \subseteq U$ de X y un elemento $(f_V)_{V\subseteq U} \in \mathcal{F}'(U)$, si denotamos por $\widetilde{\rho}_{UU'}$ a la restricción de $\mathcal{G}'$ inducida por la restricción de $\mathcal{G}$ (como en la Proposición 3.1.8), tenemos

$$\begin{aligned}\varphi'(U')\big(\rho'_{UU'}(f_V)_{V\subseteq U}\big) &= \varphi'(U')\big((f_V)_{V\subseteq U'}\big) = \big(\varphi(V)(f_V)\big)_{V\subseteq U'} \\ &= \widetilde{\rho}_{UU'}\big(\varphi(V)(f_V)\big)_{V\subseteq U} = \widetilde{\rho}_{UU'}\big(\varphi'(U)(f_V)_{V\subseteq U}\big)\,,\end{aligned}$$

por tanto, $\varphi'(U') \circ \rho'_{UU'} = \widetilde{\rho}_{UU'} \circ \varphi'(U)$, esto prueba que φ' es un morfismo. Por otro lado, si $U \in \mathcal{B}$, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}'(U) \arrow[r, "\varphi'(U)"] \arrow[d, Rightarrow] & \mathcal{G}'(U) \arrow[d, Rightarrow] \\ \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi(U)"] & \mathcal{G}(U) \end{tikzcd}$$

donde las flechas verticales son isomorfismos (definidos en la Proposición 3.1.8), de esta manera el homomorfismo $\varphi'(U)$ se identifica con $\varphi(U)$.

Supongamos que $\psi\colon \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ es otro morfismo de $\mathcal{B}$-prehaces. Para cada abierto U de X, tenemos

$$\begin{aligned}(\psi \circ \varphi)'(U)\big((f_V)_{V\subseteq U}\big) = \big(\psi(U) \circ \varphi(U)(f_V)\big)_{V\subseteq U} &= \psi'(U)\big((\varphi(U)(f_V))_{V\subseteq U}\big) \\ &= \psi'(U) \circ \varphi'(U)\big((f_V)_{V\subseteq U}\big)\,.\end{aligned}$$

Luego $(\psi \circ \varphi)'(U) = \psi'(U) \circ \varphi'(U)$ y por tanto $(\psi \circ \varphi)' = \psi' \circ \varphi'$. También se tiene $(id_{\mathcal{F}})'(U)\big((f_V)_{V\subseteq U}\big) = \big((f_V)_{V\subseteq U}\big) = id_{\mathcal{F}'}(U)\big((f_V)_{V\subseteq U}\big)$ que implica que $(id_{\mathcal{F}})' = id_{\mathcal{F}'}$, y la demostración termina. □

Observación 3.1.5. Los $\mathcal{B}$-prehaces (resp. los $\mathcal{B}$-prehaces) forman una categoría que lo denotamos por $\mathcal{B}\mathfrak{Preh}$ (resp. $\mathcal{B}\mathfrak{Hac}$). La Proposición 3.1.9 nos dice que la correspondencia $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}'$ es un funtor covariante de $\mathcal{B}\mathfrak{Preh}$ en $\mathfrak{Preh}$. Asimismo, si $\mathcal{F} \in \mathcal{B}\mathfrak{Hac}$ la correspondencia $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}'$ es un funtor covariante de $\mathcal{B}\mathfrak{Hac}$ en $\mathfrak{Hac}$.

Proposición 3.1.10. *Sea $\mathcal{F}$ es un haz sobre X y consideremos el haz $\mathcal{F}'$ que resulta de extender el $\mathcal{B}$-haz natural $V \mapsto \mathcal{F}(V)$ con $V \in \mathcal{B}$. Entonces $\mathcal{F}'$ isomorfo a $\mathcal{F}$ como haces.*

Demostración. Dado un abierto U de X, definimos el homomorfismo $\varphi(U)\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}'(U)$ dado por $f \mapsto (f\big|_V)_{V\subseteq U,\, V\in\mathcal{B}}$. A continuación definiremos un homomorfismo $\psi(U)\colon \mathcal{F}'(U) \to \mathcal{F}(U)$ inverso de $\varphi(U)$. Para ello consideremos primeramente un elemento $(f_V)_{V\subseteq U,\, V\in\mathcal{B}}$ de $\mathcal{F}'(U)$ y veamos que los elementos f_V son compatibles. En efecto, dados $V, V' \in \mathcal{B}$ tal que $V, V' \subseteq U$, y sea W un abierto básico tal que $W \subseteq V \cap V'$, entonces

$$(f_V\big|_{V\cap V'})\big|_W = f_V\big|_W = f_W = f_{V'}\big|_W = (f_{V'}\big|_{V\cap V'})\big|_W,$$

desde que $\mathcal{F}$ es haz y los abiertos básicos W cubren a $V \cap V'$ tenemos $f_V\big|_{V\cap V'} = f_{V'}\big|_{V\cap V'}$, luego existe una única sección $f \in \mathcal{F}(U)$ tal que $f\big|_V = f_V$ para todo abierto básico $V \subseteq U$. Definimos $\psi(U)\big((f_V)_{V\subseteq U,\, V\in\mathcal{B}}\big) := f$. Para mostrar que $\psi(U)$ es homomorfismo, damos dos elementos $(f_V)_{V\subseteq U}$, $(g_V)_{V\subseteq U}$ de $\mathcal{F}'(U)$ y hacemos

$$f = \psi(U)((f_V)_{V\subseteq U}),\ g = \psi(U)((g_V)_{V\subseteq U}) \text{ y } h = \psi(U)\big((f_V)_{V\subseteq U} + (g_V)_{V\subseteq U}\big).$$

Para cualquier abierto básico $V \subseteq U$, tenemos

$$h\big|_V = f_V + g_V = f\big|_V + g\big|_V = (f+g)\big|_V\,,$$

y como $\mathcal{F}$ es haz tenemos que $h = f + g$; de esta manera $\psi(U)$ es homomorfismo. Veamos ahora que $\psi(U)$ es el inverso de $\varphi(U)$, sea $f \in \mathcal{F}(U)$, tenemos $\psi(U) \circ \varphi(U)(f) =$

$\psi(U)\big((f\big|_V)_{V\subseteq U}\big)$, por otro lado hacemos $g = \psi(U)((f\big|_V)_{V\subseteq U})$, entonces por definición $g\big|_V = f\big|_V$ para cada abierto básico $V \subseteq U$, y como $\mathcal{F}$ es haz, $g = f$. Por otra parte, si $(f_V)_{V\subseteq U} \in \mathcal{F}'(U)$ y $f = \psi(U)((f_V)_{V\subseteq U})$, tenemos $\varphi(U)\circ\psi(U)((f_V)_{V\subseteq U}) = \varphi(U)(f) = (f\big|_V)_{V\subseteq U}$, donde por definición $f\big|_V = f_V$. De esta manera $\psi(U)$ y $\varphi(U)$ son inversos, y $\mathcal{F}'(U)$ se identifica con $\mathcal{F}(U)$.

Finalmente, para dos abiertos $U \subseteq V$ de X, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi(U)"] \arrow[d] & \mathcal{F}'(U) \arrow[d] \\
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "\varphi(V)"] & \mathcal{F}'(V)
\end{tikzcd}$$

donde las flechas verticales son las restricciones correspondientes, de esta manera φ y ψ son morfismos inversos, por tanto $\mathcal{F}' \cong \mathcal{F}$. $\square$

Observación 3.1.6. Los resultados anteriores también son válidos cuando los $\mathcal{B}$-prehaces, $\mathcal{B}$-haces, prehaces y los haces tienen valores en la categoría de los anillos.

Definición 3.1.7. Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de prehaces sobre X. Definimos el *prehaz núcleo* de φ como $U \mapsto \text{Nuc } \varphi(U)$. También definimos el *prehaz imagen* de φ mediante $U \mapsto \text{Im } \varphi(U)$.

Proposición 3.1.11. *Si $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es un morfismo de haces sobre X, entonces el prehaz núcleo de φ es un haz.*

Demostración. Fijemos un abierto U y sea V un abierto de U. Tomemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\text{Nuc}(\varphi(U)) \arrow[r, hook] \arrow[d, dashed, "\widetilde{\rho}_{UV}"] & \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi(U)"] \arrow[d, "\rho_{UV}"] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\rho'_{UV}"] \\
\text{Nuc}(\varphi(V)) \arrow[r, hook] & \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\varphi(U)"] & \mathcal{G}(V)
\end{tikzcd}$$

Desde que el cuadrado de la derecha es conmutativo, la imagen de ρ_{UV} restricto a $\text{Nuc}(\varphi(U))$ está contenido en $\text{Nuc}(\varphi(V))$; así, de esta manera denotamos $\widetilde{\rho}_{UV} = \rho_{UV}\big|_{\text{Nuc}(\varphi(U))}$.

A partir de la definición, es claro que $\text{Nuc}(\varphi)(\emptyset) = \text{Nuc}(\varphi(\emptyset)) = 0$ y $\widetilde{\rho}_{UU} = \rho_{UU}\big|_{\text{Nuc}(\varphi(U))} = id_{\mathcal{F}(U)}\big|_{\text{Nuc}(\varphi(U))} = id_{\text{Nuc}(\varphi(U))}$; por otra parte, dados $W \subseteq V \subseteq U$ y $s \in \text{Nuc}(\varphi(U))$ se tiene

$$\widetilde{\rho}_{UW} \circ \widetilde{\rho}_{UV}(s) = \rho_{UW} \circ \rho_{UV}(s) = \rho_{UW}(s) = \widetilde{\rho}_{UW}(s).$$

Tomemos ahora un cubrimiento abierto $\{V_i\}_{i\in I}$ de U y sea $s \in \text{Nuc}(\varphi(U))$ tal que $0 = \widetilde{\rho}_{UV_i}(s) = \rho_{UV_i}(s)$ para todo $i \in I$; sabiendo que $\text{Nuc}(\varphi(U)) \subseteq \mathcal{F}(U)$ y $\mathcal{F}$ es un haz, se sigue que $s = 0$.

Finalmente, sean $s_i \in \text{Nuc}(\varphi(V_i))$ tal que $\widetilde{\rho}_{V_i(V_i\cap V_j)}(s_i) = s_i\big|_{V_i\cap V_j} = s_j\big|_{V_i\cap V_j} = \widetilde{\rho}_{V_j(V_i\cap V_j)}(s_j)$, desde que $\text{Nuc}(\varphi(V_i)) \subseteq \mathcal{F}(V_i)$ y $\mathcal{F}$ es un haz, existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\widetilde{\rho}_{UV_i}(s) = s\big|_{V_i} = s_i$

para todo $i \in I$. Por otro lado, $s \in \mathrm{Nuc}(\varphi(U))$ si, y sólo si, $\varphi(U)(s) = 0$, entonces veamos que $\varphi(U)(s) = 0$; en efecto,

$$\varphi(U)(s)\big|_{V_i} = \varphi(V_i)(s\big|_{V_i}) = \varphi(V_i)(s_i) = 0\,.$$

Pero $\varphi(U)(s) \in \mathcal{G}(U)$ y $\mathcal{G}$ es un haz, entonces $\varphi(U)(s) = 0$, o sea, $s \in \mathrm{Nuc}(\varphi(U))$. □

Proposición 3.1.12 (Propiedad Universal de la Hacificación)**.** *Dado un prehaz $\mathcal{F}$ en X, existe un haz $\mathcal{F}^+$ y un morfismo $\theta\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ con la siguiente propiedad universal: para cualquier haz $\mathcal{G}$ y cualquier morfismo $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, existe un único morfismo $\psi\colon \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$ tal que $\varphi = \psi \circ \theta$. Además, el par $(\mathcal{F}^+, \theta)$ es único salvo isomorfismo. $\mathcal{F}^+$ es llamado* haz asociado *al prehaz $\mathcal{F}$.*

Demostración. Para cada abierto U de X, definimos $\mathcal{F}^+(U)$ como el conjunto de funciones $f : U \to \bigsqcup_{p\in U} \mathcal{F}_p$ que satisfacen las siguientes propiedades:

(i) $f(p) \in \mathcal{F}_p$ para todo $p \in U$,

(ii) para cada $p \in U$ existe una vecindad abierta $V \subseteq U$ de p y existe un elemento $s \in \mathcal{F}(V)$ tal que $f(q) = s_q$ para todo $q \in V$.

Dotemos a $\mathcal{F}^+(U)$ de estructura de grupo, para $f, g \in \mathcal{F}^+(U)$ definimos $f + g$ como

$$(f+g)(p) = f(p) + g(p) \text{ para todo } p \in U\,.$$

Es inmediato verificar que $f + g$ satisface las condiciones anteriores (i) y (ii), y con esta operación $\mathcal{F}^+(U)$ es un grupo abeliano, donde el elemento neutro es la función nula y el inverso aditivo de f es la función $-f$, definido por $(-f)(p) := -f(p)$ para todo $p \in U$. Luego, es fácil comprobar que con la restricción usual de función, $\mathcal{F}^+$ es un haz de grupos abelianos.

Dado un abierto U de X, cada elemento $s \in \mathcal{F}(U)$ induce una función $s^+ : U \to \bigsqcup_{p\in U} \mathcal{F}_p$ dada por $p \mapsto s_p$, esta función satisface trivialmente las condiciones (i) y (ii), así $s^+ \in \mathcal{F}^+(U)$. Luego tenemos una aplicación $\theta(U)\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}^+(U)$ dada por $s \mapsto s^+$, esta aplicación es un homomorfismo de grupos, ya que si $s, t \in \mathcal{F}(U)$ tenemos $(s+t)_p = s_p + t_p$ para todo $p \in U$. Sea V subconjunto abierto de U y $s \in \mathcal{F}(U)$, si $p \in V$ tenemos $(s|)_V^+(p) = \langle V, s|_V\rangle = \langle U, s\rangle = s^+(p) = s^+|_V(p)$, luego

$$(s|_V)^+ = s^+|_V\,. \tag{3.1.1}$$

Esto implica que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\theta(U)"] \arrow[d] & \mathcal{F}^+(U) \arrow[d] \\ \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\theta(V)"] & \mathcal{F}^+(V) \end{tikzcd}$$

es conmutativo, donde las flechas verticales son las restricciones correspondientes. De esta manera $\theta\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ es un morfismo de prehaces. A continuación veamos que el par $(\mathcal{F}^+, \theta)$ satisface la propiedad universal. Dado un haz $\mathcal{G}$ y un morfismo $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$. Vamos a definir un morfismo $\psi\colon \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$ tal que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "\theta"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathcal{F}^+ \arrow[d, "\psi"] \\
& \mathcal{G}
\end{tikzcd}$$

Dado un abierto U de X y $f \in \mathcal{F}^+(U)$. Por definición de $\mathcal{F}^+$, existe un cubrimiento abierto $\{U_i\}_{i\in I}$ de U y existen $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tal que $f|_{U_i} = s_i^+$ para todo $i \in I$. Sea $t_i = \varphi(U_i)(s_i) \in \mathcal{G}(U_i)$ y veamos que $t_i|_{U_i\cap U_j} = t_j|_{U_i\cap U_j}$ en $\mathcal{G}(U_i \cap U_j)$. En efecto, como $s_i^+|_{U_i\cap U_j} = f|_{U_i\cap U_j} = s_j^+|_{U_i\cap U_j}$, entonces para $p \in U_i \cap U_j$ tenemos

$$\left(s_i|_{U_i\cap U_j}\right)_p = s_i^+|_{U_i\cap U_j}(p) = s_j^+|_{U_i\cap U_j}(p) = \left(s_j|_{U_i\cap U_j}\right)_p .$$

Luego existe un entorno V de p tal que $V \subseteq U_i \cap U_j$ y $s_i|_V = s_j|_V$. Entonces tenemos

$$t_i|_V = \varphi(U_i)(s_i)|_V = \varphi(V)(s_i|_V) = \varphi(V)(s_j|_V) = \varphi(U_j)(s_j)|_V = t_j|_V .$$

Puesto que $\mathcal{G}$ es haz y los abiertos V cubren a $U_i \cap U_j$, tenemos $t_i|_{U_i\cap U_j} = t_j|_{U_i\cap U_j}$ luego existe $t \in \mathcal{G}(U)$ tal que $t\big|_{U_i} = t_i$ para todo $i \in I$. Veamos que t sólo depende de f y no del cubrimiento $\{U_i\}$ ni de los elementos s_i. Supongamos que existe un cubrimiento abierto $\{V_j\}_{j\in J}$ de U y existen $r_j \in \mathcal{F}(V_j)$ tal que $f|_{V_j} = r_j^+$ para todo $j \in J$, si hacemos $t'_j = \varphi(V_j)(r_j)$ y seguimos el argumento anterior conseguimos un elemento $t' \in \mathcal{G}(U)$ tal que $t'\big|_{V_j} = t'_j$ para todo $j \in J$. Denotemos $W_{ij} = U_i \cap V_j$ para todo $(i,j) \in I \times J$, entonces $s_i^+|_{W_{ij}} = f|_{W_{ij}} = r_j^+|_{W_{ij}}$, luego $(s_i|_{W_{ij}})^+ = (r_j|_{W_{ij}})^+$ esto implica que existe un cubrimiento $\{W_{ijk}\}_{k\in K}$ de W_{ij} tal que $s_i|_{W_{ijk}} = (r_j|_{W_{ijk}}$ para todo $k \in K$. Por otro lado, los abiertos W_{ij} cubren a U y los abiertos a W_{ijk} cubren a W_{ij}, entonces los abiertos W_{ijk} cubren a U, luego para ver que $t = t'$ basta ver que $t|_{W_{ijk}} = t'|_{W_{ijk}}$ para todo i, j, k, en efecto

$$\begin{aligned}
t|_{W_{ijk}} &= \varphi(U_i)(s_i)|_{W_{ijk}} = \varphi(W_{ijk})(s_i|_{W_{ijk}}) = \varphi(W_{ijk})(r_j|_{W_{ijk}}) = \varphi(V_j)(r_j)|_{W_{ijk}} \\
&= t'|_{W_{ijk}}.
\end{aligned}$$

Esto nos permite definir $\psi(U)(f) := t$. Veamos que $\psi(U)$ es un homomorfismo de grupos, sean $f, g \in \mathcal{F}^+(U)$, por definición de $\mathcal{F}^+$ y por la ecuación (3.1.1), existe un cubrimiento $\{U_i\}_{i\in I}$ de U y existen elementos $s_i, r_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tal que $f|_{U_i} = s_i^+$ y $g|_{U_i} = r_i^+$ para todo $i \in I$. Entonces $(f+g)|_{U_i} = (s_i + r_i)^+$, y luego

$$\begin{aligned}
\psi(U)(f+g)|U_i &= \varphi(U_i)(s_i + r_i) = \varphi(U_i)(s_i) + \varphi(U_i)(r_i) \\
&= \psi(U)(f)|U_i + \psi(U)(g)|U_i = \psi(U)(f) + \psi(U)(g)|U_i .
\end{aligned}$$

Así $\psi(U)(f+g)|U_i = \psi(U)(f) + \psi(U)(g)|U_i$ para todo $i \in I$, y por tanto $\psi(U)(f+g) = \psi(U)(f) + \psi(U)(g)$. Por otro lado, si V es un subconjunto abierto de U, tenemos $f|_V \in \mathcal{F}^+(V)$ y

$$(f|_V)|_{V\cap U_i} = f|_{V\cap U_i} = (f|_{U_i})|_{V\cap U_i} = (s_i^+)|_{V\cap U_i} = (s_i|_{V\cap U_i})^+ ,$$

entonces por definición $\psi(V)(f|_V)|_{V\cap U_i} = \varphi(V \cap U_i)(s_i|_{V\cap U_i})$ y este último es igual a $\varphi(U_i)(s_i)|_{V\cap U_i} = \psi(U)(f)|_{V\cap U_i}$. Esto implica que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}^+(U) \arrow[r, "\psi(U)"] \arrow[d] & \mathcal{G}(U) \arrow[d] \\
\mathcal{F}^+(V) \arrow[r, "\psi(V)"] & \mathcal{G}(V)
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, de esta manera ψ es un morfismo. A continuación veamos que $\psi \circ \theta = \varphi$. Si U es un abierto de X y $s \in \mathcal{F}(U)$, entonces por definición de ψ, $\psi(U)(s^+) = \varphi(U)(s)$. Puesto que $s^+ = \theta(U)(s)$, se sigue que $\psi(U) \circ \theta(U) = \varphi(U)$. Veamos ahora la unicidad de ψ, supongamos que existe un morfismo ψ' tal que $\psi' \circ \theta = \varphi$. Consideremos un elemento $f \in \mathcal{F}^+(U)$ como antes, tenemos

$$\begin{aligned}
\psi'(U)(f)|_{U_i} = \psi'(U_i)(f|_{U_i}) = \psi'(U_i)(s_i^+) = \psi'(U_i) \circ \theta(U_i)(s_i) = \varphi(U_i)(s_i) \\
= \psi(U_i) \circ \theta(U_i)(s_i) = \psi(U_i)(s_i^+) = \psi(U)(f)|_{U_i},
\end{aligned}$$

de donde $\psi'(U)(f) = \psi(U)(f)$. Finalmente la unicidad salvo isomorfismos del par $(\mathcal{F}^+, \theta)$ es consecuencia de la propiedad universal. □

Observación 3.1.7. La proposición también es válida cuando $\mathcal{F}$ es un prehaz de anillos, en este caso resulta naturalmente que el haz asociado $\mathcal{F}^+$ de $\mathcal{F}$ es también un haz de anillos.

Corolario 3.1.13. *Dado un prehaz $\mathcal{F}$ en X y un punto $p \in X$, entonces $\mathcal{F}_p^+ \cong \mathcal{F}_p$. Consecuentemente, si $\mathcal{F}$ es un haz, entonces $\mathcal{F}^+ \cong \mathcal{F}$.*

Demostración. Consideremos el morfismo $\theta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ de la Proposición 3.1.12 y veamos que para $p \in X$, el homomorfismo $\theta_p \colon \mathcal{F}_p \to \mathcal{F}_p^+$ dado por $\langle U, s\rangle \mapsto \langle U, s^+\rangle$ es un isomorfismo. Si $\langle U, s^+\rangle = 0$ entonces existe un entorno abierto $V \subseteq U$ de p tal que $S^+|_V = 0$. Como $p \in V$, tenemos $\langle U, s\rangle = s_p = s^+(p) = 0$, esto implica la inyectividad de θ_p. Por otro lado, dado $\langle U, f\rangle \in \mathcal{F}_p^+$, como $f \in \mathcal{F}^+$, existe un entorno abierto $V \subseteq U$ de p tal que $f(q) = s_q$ para todo $q \in V$, luego $f|_V = s^+|_V = (s|_V)^+$, entonces $\langle V, s|_V\rangle \mapsto \langle V, (s|_V)^+\rangle = \langle V, f|_V\rangle = \langle U, f\rangle$, de esta manera θ_p es sobreyectiva.

□

Observación 3.1.8. Sea X un espacio topológico, sea $\varphi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de prehaces, entonces por la Proposición 3.1.12, existe un único morfismo $\varphi^+ \colon \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}^+$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\theta"'] & \mathcal{G} \arrow[d, "\theta'"] \\
\mathcal{F}^+ \arrow[r, dotted, "\varphi^+"] & \mathcal{G}^+
\end{tikzcd}$$

es conmutativo donde θ y θ' son los morfismos naturales. Veamos a continuación que la hacificación $^+$ es un funtor covariante de la categoría $\mathfrak{Preh}(X)$ de prehaces en la categoría $\mathfrak{Hac}(X)$ de haces. En efecto, dados dos morfismos de prehaces $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ y $\psi\colon \mathcal{G} \to \mathcal{H}$, entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\theta"'] & \mathcal{G} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\theta'"] & \mathcal{H} \arrow[d, "\theta''"] \\
\mathcal{F}^+ \arrow[r, dotted, "\varphi^+"] & \mathcal{G}^+ \arrow[r, dotted, "\psi^+"] & \mathcal{H}^+
\end{tikzcd}$$

y por la Proposición 3.1.12, tenemos $(\psi \circ \varphi)^+ = \psi^+ \circ \varphi^+$, por otro lado como el morfismo identidad $id_{\mathcal{F}^+}\colon \mathcal{F}^+ \to \mathcal{F}^+$ hace conmutar al diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "id_{\mathcal{F}}"] \arrow[d, "\theta"'] & \mathcal{F} \arrow[d, "\theta"] \\
F^+ \arrow[r, dotted] & \mathcal{F}^+
\end{tikzcd}$$

entonces $(id_{\mathcal{F}})^+ = id_{\mathcal{F}^+}$.

Corolario 3.1.14. *Sea i el funtor inclusión de haces a prehaces sobre X. Entonces $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, i(\mathcal{G})) \cong \mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}^+, \mathcal{G})$ para todo prehaz $\mathcal{F}$ y todo haz $\mathcal{G}$. Por tanto, el funtor hacificación $^+$ es adjunto a izquierda de i.*

Demostración. Dado un morfismo de prehaces $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ donde $\mathcal{G}$ es un haz, la propiedad universal de hacificación nos da un único morfismo $\varphi'\colon \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$. Luego, como $i(\mathcal{G}) = \mathcal{G}$, la correspondencia $\varphi \to \varphi'$ nos da una aplicación $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, i(\mathcal{G})) \to \mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}^+, \mathcal{G})$. Por otro lado, si $\psi\colon \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$ es un morfismo de haces, y $\theta\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ es el morfismo natural, entonces la correspondencia $\psi \mapsto \psi \circ \theta$ nos da la aplicación inversa, que es inmediato verificarlo. $\square$

Lema 3.1.15. *Sean $\mathcal{F}$ un haz de grupos sobre X, $\{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento de un abierto de U de X, G un grupo abeliano y sea $\{\alpha_i : G \to \mathcal{F}(U_i)\}_{i\in I}$ una familia de homomorfismos tal que $\alpha_i(f)|_{U_i\cap U_j} = \alpha_j(f)|_{U_i\cap U_j}$ para todo $f \in G$ y para todo $i, j \in I$. Entonces existe un único homomorfismo de grupos $\alpha : G \to \mathcal{F}(U)$ tal que $\alpha(f)|_{U_i} = \alpha_i(f)$ para todo $f \in G$ y para todo $i \in I$.*

Demostración. Puesto que $\mathcal{F}$ es haz y para cada $f \in G$ los elementos $\alpha_i(f) \in \mathcal{F}(U_i)$ son compatibles, existe una única sección $\alpha(f) \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\alpha(f)|_{U_i} = \alpha_i(f)$ para todo $i \in I$. Esto define una aplicación $\alpha : G \to \mathcal{F}(U)$, que es un homomorfismo, pues,

$$\alpha(f+g)|_{U_i} = \alpha_i(f+g) = \alpha_i(f) + \alpha_i(g) = \alpha(f)|_{U_i} + \alpha(g)|_{U_i} = (\alpha(f) + \alpha(g))|_{U_i},$$

y como $\mathcal{F}$ es un haz tenemos que $\alpha(f+g) = \alpha(f) + \alpha(g)$. De esta manera tenemos un homomorfismo de grupos (o de anillos). Supongamos ahora que existe otro homomorfismo

$\beta : G \to \mathcal{F}(U)$ tal que $\beta(f)|_{U_i} = \alpha_i(f)$ para todo $i \in I$, entonces tenemos $\beta(f)|_{U_i} = \alpha(f)|_{U_i}$, luego $\beta(f) = \alpha(f)$ y se sigue la unicidad de α. Debemos notar también que esta observación es válida en la categoría de anillos, es decir, si $\mathcal{F}$ es un haz de anillos, G un anillo, y los homomorfismos α_i son homomorfismo de anillos, entonces α es un homomorfismo de anillos. □

Observación 3.1.9. El lema anterior es también válido en la categoría de anillos, es decir, si $\mathcal{F}$ es un haz de anillos, G un anillo, y los homomorfismos α_i son homomorfismos de anillos, entonces α es un homomorfismo de anillos.

Proposición 3.1.16. *Sea X un espacio topológico, $\mathcal{B}$ una base de abiertos de X, sea $\mathcal{F}$ un prehaz y $\mathcal{F}'$ el prehaz que extiende naturalmente al $\mathcal{B}$-prehaz $V \mapsto \mathcal{F}(V)$ con $V \in \mathcal{B}$. Entonces el haz asociado de $\mathcal{F}'$ coincide con el haz asociado de $\mathcal{F}$.*

Demostración. Sea U un abierto de X, para cada $V \in \mathcal{B}$ con $V \subseteq U$, consideremos el homomorfismo $\Theta_V : \mathcal{F}'(U) \to \mathcal{F}^+(V)$ dado por $(f_V)_{V\subseteq U} \mapsto f_V^+$. Puesto que $\mathcal{F}^+$ es haz, podemos comprobar que $f_V^+|_{V\cap W} = f_W^+|_{V\cap W}$ para todo $V, W \in \mathcal{B}$ tal que $V, W \subseteq U$, entonces por el Lema 3.1.15, existe un único homomorfismo $\Theta(U) : \Theta_V : \mathcal{F}'(U) \to \mathcal{F}^+(U)$ tal que $\Theta(U)(t)|_V = f_V^+$ para todo $t = (f_V)_{V\subseteq U} \in \mathcal{F}'(U)$ y $V \in \mathcal{B}$ con $V \in U$. Es inmediato verificar que Θ conmuta con las restricciones, de esta manera $\Theta : \mathcal{F}' \to \mathcal{F}^+$ es un morfismo de prehaces. Afirmamos que en este caso el par $(\mathcal{F}^+, \Theta)$ satisface la propiedad universal de hacificación (ver Proposición 3.1.12). En efecto, sea $\mathcal{G}$ un haz sobre X y $\varphi : \mathcal{F}' \to \mathcal{G}$ un morfismo de prehaces. Si U un abierto de X y $s \in \mathcal{F}^+(U)$, entonces (por la construcción de $\mathcal{F}^+$), existe un cubrimiento $\{U_i\}_{i\in I}$ de U y existen elementos $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tal que $s|_{U_i} = f_i^+$ para todo $i \in I$. Sea $t_i = \varphi(U_i)((f_i|_V)_{V\subseteq U_i})$, es de rutina comprobar que los $t_i \in \mathcal{G}(U_i)$ son compatibles, luego existe una única sección $t \in \mathcal{G}(U)$ tal que $t|_{U_i} = t_i$ para todo $i \in I$. Además podemos comprobar que t sólo depende de s y no del cubrimiento $\{U_i\}_{i\in I}$ ni de los elementos f_i tomados, esto nos una aplicación $\psi(U) : \mathcal{F}^+(U) \to \mathcal{G}(U)$ y no hay dificultad en verificar que $\psi : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$ es un morfismo y es único para la cual el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}' \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\Theta"'] & \mathcal{G} \\ & \mathcal{F}^+ \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

es conmutativo. □

Definición 3.1.8. Si $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es un morfismo de haces sobre X, definimos el *núcleo* de φ, denotado por Nuc φ como el prehaz núcleo de φ (el cual es un haz de acuerdo a la Proposición 3.1.11). Decimos que un morfismo $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es *inyectivo* si Nuc $\varphi = 0$; es decir, φ es inyectivo si y sólo $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ es inyectivo para todo abierto U de X.

Definimos la *imagen* de φ, denotado por Im φ como el haz asociado al prehaz imagen de φ. Decimos que un morfismo $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es *sobreyectivo* si Im $\varphi = \mathcal{G}$.

Observación 3.1.10. Si $\varphi(U)\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ es sobreyectivo para todo abierto U de X, entonces Im $\varphi = \mathcal{G}$. En efecto, si denotamos por $im\,\varphi$ al prehaz imagen de φ, tenemos $im\,\varphi = \mathcal{G}$, luego según el Corolario 3.1.13, Im $\varphi = (im\,\varphi)^+ = \mathcal{G}^+ = \mathcal{G}$. Por otro lado, la recíproca no es cierta en general (ver Observación 3.1.11).

Definición 3.1.9. Decimos que una sucesión de haces y morfismos

$$\cdots \to \mathcal{F}^{i-1} \xrightarrow{\varphi^{i-1}} \mathcal{F}^{i} \xrightarrow{\varphi^{i}} \mathcal{F}^{i+1} \to \cdots$$

es exacta si para cada i, Nuc $\varphi^i =$ Im φ^{i-1}.

Lema 3.1.17. *Sea $\mathcal{F}$ un haz sobre un espacio topológico X, entonces $\mathcal{F} = 0$ si y sólo si $\mathcal{F}_p = 0$ para todo $p \in X$. Además, si $\mathcal{G}$ y $\mathcal{G}'$ son subhaces de $\mathcal{F}$, entonces*

(a) *$\mathcal{G} = \mathcal{F}$ si y sólo si $\mathcal{G}_p = \mathcal{F}_p$ para todo $p \in X$.*

(b) *$\mathcal{G} = \mathcal{G}'$ si y sólo si $\mathcal{G}_p = \mathcal{G}'_p$ para todo $p \in X$.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}_p = 0$ para todo $p \in X$ y tomemos U un abierto de X y $s \in \mathcal{F}(U)$, entonces $s_p = 0$ para todo $p \in U$, y por la Observación 3.1.2 resulta $s = 0$.

(a). Supongamos que $\mathcal{G}_p = \mathcal{F}_p$ para todo $p \in X$. Tenemos $(\mathcal{F}/\mathcal{G})_p = \mathcal{F}_p/\mathcal{G}_p = 0$ para todo $p \in X$, luego $\mathcal{F}/\mathcal{G} = 0$, por tanto $\mathcal{G} = \mathcal{F}$.

(b). Supongamos que $\mathcal{G}_p = \mathcal{G}'_p$ para todo $p \in X$. Puesto que $\mathcal{G}$ es un subhaz del haz $\mathcal{G} \oplus \mathcal{G}'$ y $(\mathcal{G} \oplus \mathcal{G}')_p = \mathcal{G}_p \oplus \mathcal{G}'_p = \mathcal{G}_p$, tenemos por (a) que $\mathcal{G} = \mathcal{G} \oplus \mathcal{G}'$, es decir que $\mathcal{G}'$ es un subhaz de $\mathcal{G}$. Del mismo modo tenemos que $\mathcal{G}$ es un subhaz de $\mathcal{G}'$, por tanto $\mathcal{G} = \mathcal{G}'$.

Proposición 3.1.18. *Sea X un espacio topológico. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(a) *Para cualquier morfismo de haces $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, se cumple que para cada punto $p \in X$,*

$$(\text{Nuc } \varphi)_p = \text{Nuc}(\varphi_p) \quad y \quad (\text{Im } \varphi)_p = \text{Im}(\varphi_p).$$

(b) *El morfismo φ es inyectivo (resp. sobreyectivo) si, y sólo si, la aplicación inducida en los tallos φ_p es inyectiva (resp. sobreyectiva) para todo $p \in X$.*

(c) *La sucesión de haces y morfismos $\cdots \to \mathcal{F}^{i-1} \xrightarrow{\varphi^{i-1}} \mathcal{F}^{i} \xrightarrow{\varphi^{i}} \mathcal{F}^{i+1} \to \cdots$ es exacta si, y sólo si, para cada $p \in X$ la correspondiente sucesión de tallos es exacta como sucesión de grupos abelianos.*

Demostración. (a). Veamos la primera igualdad. Si $\langle U, s\rangle \in (\text{Nuc } \varphi)_p$, entonces $\varphi(U)(s) = 0$, luego $\varphi_p\langle U, s\rangle = \langle U, \varphi(U)(s)\rangle = \langle U, 0\rangle$, lo que nos da $\langle U, \varphi\rangle \in \text{Nuc}(\varphi_p)$. Recíprocamente, dado $\langle U, s\rangle \in \text{Nuc}(\varphi_p)$, se tiene que $\langle U, \varphi(U)(s)\rangle = \varphi_p\langle U, s\rangle = \langle X, 0\rangle$; así que existe un abierto $V \subseteq U$ tal que $\varphi(V)(s\big|_V) = \varphi(U)(s)\big|_V = 0$, entonces $t = s\big|_V \in \text{Nuc}(\varphi(V))$, de donde se sigue que $\langle U, s\rangle = \langle V, t\rangle \in (\text{Nuc } \varphi)_p$.

Veamos la segunda igualdad. Sea $\langle V, t\rangle \in \text{Im}(\varphi_p)$, entonces existe $\langle U, s\rangle \in \mathcal{F}_p$ tal que $\langle U, \varphi(U)(s)\rangle = \varphi\langle U, s\rangle = \langle V, t\rangle$, de aquí obtenemos un abierto $W \subseteq U \cap V$ conteniendo a p, tal que $\varphi(W)(s\big|_W) = \varphi(U)(s)\big|_W = t\big|_W \in \text{Im}(\varphi(W))$; por tanto $\langle V, t\rangle = \langle W, t\big|_W\rangle \in (im\ \varphi)_p = (\text{Im } \varphi)_p$. Recíprocamente, dado $\langle V, t\rangle \in (\text{Im } \varphi)_p = (im\ \varphi)_p$, tenemos que $t \in \text{Im}(\varphi(W))$ luego existe $s \in \mathcal{F}(V)$ tal que $\varphi(V)(s) = t$. Entonces $\varphi_p\langle V, s\rangle = \langle V, \varphi(V)(s)\rangle = \langle V, t\rangle$, por tanto $\langle V, t\rangle \in \text{Im}(\varphi_p)$

(b). Se sigue de inmediato de (a).

(c). Si $\operatorname{Im}\varphi^{i-1} = \operatorname{Nuc}\varphi^i$, por (a) tenemos que, $\operatorname{Im}\varphi_p^{i-1} = \operatorname{Nuc}\varphi_p^i$ para todo $p \in X$, luego la sucesión es exacta en los tallos. Recíprocamente, supongamos que $\operatorname{Im}\varphi_p^{i-1} = \operatorname{Nuc}\varphi_p^i$ para todo $p \in X$, puesto que $\operatorname{Im}\varphi^{i-1}$ y $\operatorname{Nuc}\varphi^i$ son subhaces de $\mathcal{F}^i$, por (b) de Lema 3.1.17, tenemos $\operatorname{Im}\varphi^{i-1} = \operatorname{Nuc}\varphi^i$.

□

Corolario 3.1.19. *Sea $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de haces sobre X. Entonces φ es sobreyectiva si, y sólo si, para todo subconjunto abierto $U \subseteq X$ y para cada $s \in \mathcal{G}(U)$, existe un cubrimiento abierto $\{U_i\}_{i\in I}$ de U y elementos $t_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tal que $\varphi(U_i)(t_i) = s\big|_{U_i}$ para todo $i \in I$.*

Demostración. Por (b) del Lema 3.1.18, probar que φ es sobreyectiva equivale a probar que φ_p es sobreyectiva para todo $p \in X$. Supongamos que φ_p es sobreyectiva para todo $p \in X$, y sean U un abierto de X, $s \in \mathcal{F}(U)$ y tomemos $p \in U$. Puesto que φ_p es sobreyectiva, existe un abierto V de X y un elemento $t \in \mathcal{F}(V)$ (que depende de p) tal que $\langle V, \varphi(V)(t)\rangle = \langle U, s\rangle$, luego existe entorno W_p de p contenido en U tal que $\varphi(W_p)(t|_{W_p}) = s|_{W_p}$. De esta manera los abiertos W_p cubren a U y junto con los elementos $t|_{W_p} \in \mathcal{F}(W_p)$ satisfacen la afirmación requerida. Veamos la parte recíproca, dado $\langle U, s\rangle \in \mathcal{G}_p$, por hipótesis, existe un cubrimiento $\{U_i\}$ de U y existen elementos $t_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tal que $\varphi(U_i)(t_i) = s|_{U_i}$. Como $p \in U$, existe i tal que $\mathfrak{p} \in U_i$, entonces $\langle U_i, t_i\rangle \in \mathcal{F}_p$ y $\varphi_p\langle U_i, t_i\rangle = \langle U_i, \varphi(U_i)(t_i)\rangle = \langle U_i, s|_{U_i}\rangle = \langle U, s\rangle$. Así φ_p es sobreyectiva con $p \in X$ arbitrario. □

Proposición 3.1.20. *Dado un subconjunto abierto U de X, el funtor $\Gamma(U, \cdot)$ de haces en X a grupos abelianos es un funtor exacto a izquierda; es decir, si $0 \to \mathcal{F}' \overset{\varphi}{\to} \mathcal{F} \overset{\psi}{\to} \mathcal{F}''$ es una sucesión exacta de haces, entonces $0 \to \Gamma(U, \mathcal{F}') \to \Gamma(U, \mathcal{F}) \to \Gamma(U, \mathcal{F}'')$ es una sucesión exacta de grupos.*

Demostración. Fijemos un abierto U de X. Como φ es inyectiva, tenemos $\operatorname{Nuc}\varphi = 0$ luego $0 = (Nu\varphi)(U) = \operatorname{Nuc}\varphi(U)$ y $\varphi(U)$ es inyectiva. A continuación veamos que $\operatorname{Im}\varphi(U) = \operatorname{Nuc}\psi(U)$. Por la Proposición 3.1.18 la sucesión $0 \to \mathcal{F}'_p \overset{\varphi_p}{\to} \mathcal{F}_p \overset{\psi_p}{\to} \mathcal{F}''_p$ es exacta para todo $p \in X$. Sea $p \in U$ y $s \in \mathcal{F}'(U)$ tenemos $(\psi(U) \circ \varphi(U)(s))_p = \langle U, \psi(U) \circ \varphi(U)(s)\rangle = \psi_p(\varphi_p\langle U, s\rangle) = 0$, y por la Observación 3.1.2, $\psi(U) \circ \varphi(U)(s) = 0$ luego $\operatorname{Im}\varphi(U) \subseteq \operatorname{Nuc}\psi(U)$. Por otro lado, sea $s \in \operatorname{Nuc}\psi(U)$, para cualquier $p \in U$ tenemos $\psi_p\langle U, s\rangle = \langle U, \psi(U)(s)\rangle = 0$, así $\langle U, s\rangle \in \operatorname{Nuc}\ \psi_p = \operatorname{Im}\ \varphi_p$, entonces existe un abierto V de X que contiene a p y existe una sección $t \in \mathcal{F}'(V)$ tal que $\varphi_p\langle V, t\rangle = \langle U, s\rangle$ y como $\varphi_p\langle V, t\rangle = \langle V, \varphi(t)\rangle$, existe un entorno W de p tal que $W \subseteq U \cap V$ y $\varphi(V)(t)|_W = s|_W$, o sea $\varphi(W)(t|_W) = s|_W$ donde W y $t \in \mathcal{F}'(W)$ dependen de p y $p \in W \subseteq U$. Escribiendo W_i es lugar de W y t_i en lugar de t, tenemos un cubrimiento de U formado por los U_i y tenemos secciones $t_i \in \mathcal{F}'(W_i)$ tal que $\varphi(W_i)(t_i) = s|_{W_i}$. Denotemos por W_{ij} a la intersección de W_i y W_j, tenemos $\varphi(W_{ij})(t_i|_{W_{ij}}) = \varphi(W_i)(t_i)|_{W_{ij}} = (s|W_i)|_{W_{ij}} = s|_{W_{ij}}$, por lo cual $\varphi(W_{ij})(t_i|_{W_{ij}}) = \varphi(W_{ij})(t_j|_{W_{ij}})$ y puesto que $\varphi(W_{ij})$ es inyectiva, $t_i|_{W_{ij}} = t_j|_{W_{ij}}$ entonces existe $t \in \mathcal{F}'(U)$ tal que $t|_{W_i} = t_i$. Por otro lado, $\varphi(U)(t)|_{W_i} = \varphi(W_i)(t|_{W_i}) = \varphi(W_i)(t_i) = s|_{W_i}$ para todo i, luego $\varphi(U)(t) = s$, asi $t \in \operatorname{Im}\varphi(U)$. □

Corolario 3.1.21. *Sea $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de haces sobre X. Entonces φ es un isomorfismo de haces si, y sólo si, $\varphi(U)$ es un isomorfismo para todo abierto U de X.*

Demostración. Si φ es un isomorfismo y U es un abierto de X, entonces aplicamos la Proposición 3.1.20 a la sucesión exacta

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \to 0 \to 0\,,$$

para obtener la sucesión exacta $0 \to \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\varphi(U)} \mathcal{G}(U) \to 0$, es decir $\varphi(U)$ es un isomorfismo. La recíproca es trivialmente cierto. $\square$

Ejemplo 3.1.22. Consideremos $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ con la topología usual y sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ los haces de grupos abelianos definidos por:

$$\mathcal{F}(U) = \{f \colon U \to \mathbb{C} \mid f \text{ es holomorfa}\} \quad \text{con la operación aditiva,}$$

$$\mathcal{G}(U) = \{f \colon U \to X \mid f \text{ es holomorfa}\} \quad \text{con la operación multiplicativa,}$$

para cada abierto U de X, y consideremos el homomorfismo $\varphi(U) \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ definido por $f \mapsto \exp \circ f$. Afirmamos que φ es un morfismo sobreyectivo, en efecto por (b) de la Proposición 3.1.18, basta probar que cada φ_z es sobreyectivo, donde $z \in X$. Dado $\langle U, f\rangle \in \mathcal{G}_z$ y tomemos un subconjunto abierto y conexo V de U que contiene al punto z, entonces la función $Log \circ (f|_V)$ es holomorfa y

$$\varphi_z\langle V, Log \circ (f|_V)\rangle = \langle V, exp \circ (Log \circ (f|_V))\rangle = \langle V, f|_V\rangle = \langle U, g\rangle\,,$$

por tanto φ_z es sobreyectivo. También afirmamos que $\varphi(X)$ no es sobreyectiva, en efecto si $\varphi(X)$ es sobreyectiva, entonces para la identidad $id_X \in \Gamma(X, \mathcal{G})$ debe existir un función holomorfa $f \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ tal que $id_X = \varphi(X)(f) = exp \circ f$, entonces f es una función logaritmo definida en $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, que es imposible.

Observación 3.1.11. En ejemplo anterior nos muestra, que si $\varphi(U)$ es sobreyectiva para todo abierto $U \in X$, no implica que φ sea sobreyectiva. Por otro lado, el prehaz imagen $im\,\varphi$ no es un haz, caso contrario tendremos $im\,\varphi = \operatorname{Im}\varphi = \mathcal{G}$, luego $im\,\varphi(X) = \Gamma(X, \mathcal{G})$, lo cual es falso, según el ejemplo anterior. Además, este ejemplo muestra que el funtor $\Gamma(X, .)$ no es exacta en general, para ver ello basta considerar la sucesión exacta

$$0 \to \operatorname{Nuc}\varphi \hookrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \to 0\,.$$

Proposición 3.1.23 (El haz de morfismos locales)**.** *Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ haces de grupos abelianos en X. Para un conjunto abierto U de X, el conjunto de morfismos de haces restrictos* $\operatorname{Hom}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$ *tiene estructura de grupo abeliano. También, la correspondencia $U \mapsto$* $\operatorname{Hom}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$ *es un haz.*

Demostración. Para cada abierto U, denotemos $\mathcal{H}(U) = \operatorname{Hom}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$. Dados $f, g \in \mathcal{H}(U)$, para cada abierto $V \subseteq U$ de X y $s \in \mathcal{F}(V)$, definimos $(f + g)(V)(s) = f(V)(s) + g(V)(s)$. Se comprueba inmediatamente que $f + g$ es un morfismo y con esta operación $\mathcal{H}(U)$ es un grupo abeliano. El elemento neutro de $\mathcal{H}(U)$ es el morfismo θ que está defindo como $\theta(V)(s) = 0$ para todo abierto $V \subseteq U$ y $s \in \mathcal{F}(V)$ y si $f \in \mathcal{H}(U)$ el inverso aditivo de f es el morfismo $-f$ definido como $(-f)(V)(s) = -f(V)(s)$. Por otro lado para una inclusión $V \subseteq U$ de abiertos de X, definimos la restricción $\mathcal{H}(U) \to \mathcal{H}(V)$ dado por $f \mapsto f|_V$ donde $f|_V(W) = f(W)$ para todo abierto $W \subseteq V$, luego es inmediato comprobar que $\mathcal{H}$ es un prehaz. A continuación veamos que $\mathcal{H}$ es un haz . Dado un cubrimiento $\{U_i\}_{i\in I}$ de U y dado $f \in \mathcal{H}(U)$ tal que $f|_{U_i} = 0$. Ahora, tomemos un abierto $V \subseteq U$, una sección $s \in \mathcal{F}(V)$ y denotemos $V_i = U_i \cap V$ para cada i. Luego, tenemos $f(V)(s)|_{V_i} = f(V_i)(s|_{V_i}) = f|_{U_i}(V_i)(s|_{V_i}) = 0$, ahora como $f(V)(s) \in \mathcal{G}(V)$ y los abiertos V_i cubren a V, $f(V)(s) = 0$, se sigue que $f = 0$. Por otra parte, dados $f_i \in \mathcal{H}(U_i)$ tal que $f_i|_{U_i\cap U_j} = f_j|_{U_i\cap U_j}$ para todo i, j; y tomemos un abierto $V \subseteq U$, una sección $s \in \mathcal{F}(V)$; y denotemos $V_i = U_i \cap V$, $s_i = s|_{V_i}$, $t_i = f_i(U_i)(s_i)$ y $V_{ij} = V_i \cap V_j$. Es evidente que $s_i|_{V_{ij}} = s_j|_{V_{ij}}$, luego tenemos

$$t_i|_{V_{ij}} = f_i(U_i)(s_i)|_{V_{ij}} = f_i(V_{ij})(s_i|_{V_{ij}}) = f_i|_{U_i\cap U_j}(V_{ij})(s_i|_{V_{ij}}),$$

$$t_j|_{V_{ij}} = f_j(U_i)(s_j)|_{V_{ij}} = f_j(V_{ij})(s_j|_{V_{ij}}) = f_j|_{U_i\cap U_j}(V_{ij})(s_j|_{V_{ij}}),$$

los cuales implican $t_i|_{V_{ij}} = t_j|_{V_{ij}}$. Luego existe un único $t \in \mathcal{G}(V)$ tal que $t|_{V_i} = t_i$ para todo i. Así, para cada abierto $V \subseteq U$ y $s \in \mathcal{F}(V)$ definimos $f(V)(s) = t$ y afirmamos que f es un elemento de $\mathcal{H}(U)$. Primeramente veamos que $f(V)$ es un homomorfismo de grupos, en efecto, dados $s, s' \in \mathcal{F}(V)$, denotemos $f(V)(s) = t$, $f(V)(s') = t'$, $f(V)(s + s') = t''$ y $V_i = U_i \cap V$. Entonces debemos mostrar que $t'' = t + t' \in \mathcal{G}(V)$, para ello basta ver que $t''|_{V_i} = (t + t')|_{V_i}$ para todo i. Tenemos

$$\begin{aligned}(t + t')|_{V_i} = t|_{V_i} + t'|_{V_i} = f(V_i)(s|_{V_i}) + f(V_i)(s'|_{V_i}) = f(V_i)((s + s')|_{V_i})\\ = f(V)(s + s')|_{V_i} = t''|_{V_i},\end{aligned}$$

así $(t + t')|_{V_i} = t''|_{V_i}$. A continuación veamos que f conmuta con las restricciones, dados dos abiertos $W \subseteq V$ contenidos en U, $s \in \mathcal{F}(V)$, $t = f(V)(s)$, $t' = f(W)(s|_W)$, $s_i = s|_{V_i}$, $t_i = f_i(V_i)(s_i)$ y sea $W_i = U_i \cap W$, entonces tenemos

$$t'|_{W_i} = f(W_i)(s|_{W_i}) = f(V)(s)|_{W_i} = t|_{W_i}.$$

Como los abiertos W_i cubren a W tenemos $t' = t|_W$. Por tanto f es un morfismo. Finalmente veamos que $f|_{U_i} = f_i$ para todo i, en efecto, para un i fijo tomemos un abierto cualquiera $V \subseteq U_i$ y $s \in \mathcal{F}(V)$, entonces tenemos $V_i = U_i \cap V = V$ y por definición $f(V)(s)|_{V_i} = f_i(V_i)(s|_{V_i})$, luego $f|_{V_i}(V)(s) = f_i(V)(s)$, por tanto $f|_{V_i} = f_i$ para todo i. De esta manera $\mathcal{H}$ es un haz de grupos abelianos. □

Definición 3.1.10. El haz $U \mapsto \mathrm{Hom}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$ definido en la proposición anterior es llamado *haz de morfismos locales* de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{G}$, y denotamos por $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.

Definición 3.1.11. Sean X e Y espacios topológicos y $f\colon X \to Y$ una continua. Dado un haz $\mathcal{F}$ en X, definimos el haz *imagen directa* $f_*\mathcal{F}$ en Y por $(f_*\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$ para cualquier abierto $V \subseteq Y$. Para cualquier haz $\mathcal{G}$ en Y, definimos el haz *imagen inversa* $f^{-1}\mathcal{G}$ en X como el haz asociado al prehaz $f^\bullet\mathcal{G}$ dado por $U \mapsto \varinjlim_{V\supseteq f(U)} \mathcal{G}(V)$, donde U es un subconjunto abierto de X, y el límite directo es considerado sobre todos los abiertos V de Y conteniendo $f(U)$.

Observación 3.1.12. De la construcción del límite directo podemos también considerar a $(f^\bullet\mathcal{G})(U)$ como el conjunto de elementos $\langle V, s\rangle$ donde V es un abierto de X tal que $f(U) \subseteq V$ y $s \in \mathcal{G}(V)$, y dos tales elementos $\langle V, s\rangle$ y $\langle V', s'\rangle$ son iguales si existe un abierto W tal que $f(U) \subseteq W \subseteq V \cap V'$ y $s|_W = s'|_W$.

Si $p \in X$ y $q = f(p)$, entonces $(f^{-1}\mathcal{G})_p \cong \mathcal{G}_q$. En efecto, la aplicación $\mathcal{G}_q \to (f^\bullet\mathcal{G})_p$ dada por $\langle V, t\rangle \mapsto \langle f^{-1}(V), \langle V, t\rangle\rangle$ es un isomorfismo.

Observación 3.1.13. La correspondencia $f_*\colon \mathcal{F} \mapsto f_*\mathcal{F}$ es un funtor de $\mathfrak{Hac}(X)$ en $\mathfrak{Hac}(Y)$. En efecto, para un morfismo $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ de $\mathfrak{Hac}(X)$ definimos el morfismo $f_*\varphi$, definiendo en cada abierto V de Y, como el homomorfismo $f_*\varphi(V)\colon f_*\mathcal{F}(V) \to f_*\mathcal{G}(V)$, dado por $s \mapsto \varphi(f^{-1}(V))(s)$. Por otro lado, si $\mathcal{G}$ es un prehaz sobre Y, la correspondencia $f^\bullet\colon \mathcal{G} \mapsto f^\bullet\mathcal{G}$ es un funtor de $\mathfrak{Preh}(Y)$ en $\mathfrak{Preh}(X)$. En efecto, para un morfismo $\psi\colon \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ de $\mathfrak{Preh}(Y)$, definimos el morfismo $f^\bullet\psi$, definiendo en cada abierto U de X como el homomorfismo $f^\bullet\psi(U)\colon f^\bullet\mathcal{G}(U) \to f^\bullet\mathcal{H}(U)$ dado por $\langle V, s\rangle \mapsto \langle V, \psi(V)(s)\rangle$. Luego, si $\psi\colon \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ es un morfismo de haces sobre Y, entonces definimos $f^{-1}\psi$ como $(f^\bullet\psi)^+$ donde $^+$ es el funtor hacificación. De esta manera la correspondencia $f^{-1}\colon \mathcal{G} \mapsto f^{-1}\mathcal{G}$ es un funtor de $\mathfrak{Hac}(Y)$ en $\mathfrak{Hac}(X)$.

Proposición 3.1.24 (Propiedad de adjunción de f^{-1})**.** *Sea $f\colon X \to Y$ una aplicación continua entre espacios topológicos. Existe una biyección*

$$\mathrm{Hom}_X(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong \mathrm{Hom}_Y(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})\,.$$

Consecuentemente, para cualquier haz $\mathcal{F}$ sobre X, existe una aplicación natural $f^{-1}f_*\mathcal{F} \to \mathcal{F}$, y para cualquier haz $\mathcal{G}$ en Y existe una correspondencia natural $\mathcal{G} \to f_*f^{-1}\mathcal{G}$.

Demostración. Por el Corolario 3.1.14 tenemos la biyección

$$\mathrm{Hom}_X(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong \mathrm{Hom}_X(f^\bullet\mathcal{G}, \mathcal{F})\,.$$

Entonces probaremos que $\mathrm{Hom}_X(f^\bullet\mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong \mathrm{Hom}_Y(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$. En efecto, dado un abierto U de X, tenemos que $f^\bullet(f_*\mathcal{F})(U)$ es el conjunto de elementos $\langle V, s\rangle$ tal que $f(U) \subseteq V$ y $s \in \mathcal{F}(f^{-1}(V))$. Definimos el homomorfismo $\varphi(U)\colon f^\bullet(f_*\mathcal{F})(U) \to \mathcal{F}(U)$ por $\langle V, s\rangle \mapsto s|_U$. Este homomorfismo está bien definido, pues si $\langle V, s\rangle = \langle W, t\rangle$, por definición existe un abierto Z de X tal que $f(U) \subseteq Z \subseteq V \cap U$ y $s|_{f^{-1}(Z)} = t|_{f^{-1}(Z)}$ (restricción en $f_*\mathcal{F}$), luego tenemos $U \subseteq f^{-1}(Z)$ y $s|_U = t|_U$. De esta manera se tiene un morfismo de prehaces $\varphi : f^\bullet(f_*\mathcal{F}) \to \mathcal{F}$. Luego definimos $\Phi\colon \mathrm{Hom}_Y(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}) \to \mathrm{Hom}_X(f^\bullet\mathcal{G}, \mathcal{F})$ por $\alpha \mapsto \varphi \circ f^\bullet\alpha$. Por oro lado, dado un abierto V de Y, entonces $f_*(f^\bullet\mathcal{G})(V) = f^\bullet\mathcal{G}(f^{-1}(V))$ es el conjunto de elementos $\langle W, s\rangle$ tal que $f(f^{-1}(V)) \subseteq W$ y $s \in \mathcal{G}(W)$. Definimos el homomorfismo $\psi(V)\colon \mathcal{G}(V) \to f_*(f^\bullet\mathcal{G})(V)$ por $s \mapsto \langle V, s\rangle$. Este homomorfismo está bien definido, ya que $f(f^{-1}(V)) \subseteq V$. De esta manera tenemos un morfismo de prehaces $\psi\colon \mathcal{G} \to f_*(f^\bullet\mathcal{G})$. Luego definimos la aplicación $\Psi\colon \mathrm{Hom}_X(f^\bullet\mathcal{G}, \mathcal{F}) \to \mathrm{Hom}_Y(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$ por $\beta \mapsto f_*\beta \circ \psi$. Ahora comprobemos que Φ y Ψ son aplicaciones inversas. Sean $\beta \in \mathrm{Hom}_X(f^\bullet\mathcal{G}, \mathcal{F})$, U un abierto de X y $\langle V, s\rangle \in f^\bullet\mathcal{G}(U)$, tenemos $\Phi(\Psi(\beta)) = \Phi(f_*\beta \circ \psi) = \varphi \circ f^\bullet(f_*\beta \circ \psi)$, luego

$$\begin{aligned}
\Phi(\Psi(\beta))(U)\langle V, s\rangle &= \varphi \circ f^\bullet(f_*\beta \circ \psi)(U)\langle V, s\rangle \\
&= \varphi(U) \circ f^\bullet f_*\beta(U) \circ f^\bullet\psi(U)\langle V, s\rangle \\
&= \varphi(U) \circ f^\bullet f_*\beta(U)\big\langle V, \psi(V)(s)\big\rangle \\
&= \varphi(U)\big\langle V, \beta(U)\langle V, s\rangle\big\rangle \\
&= \big(\beta(U)\langle V, s\rangle\big)\big|_U = \beta(U)\langle V, s\rangle\,,
\end{aligned}$$

así $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_X(f^\bullet\mathcal{G}, \mathcal{F})}$. Por otro lado, sean $\alpha \in \mathrm{Hom}_Y(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$, V un abierto de Y y

$s \in \mathcal{G}(V)$, tenemos $\Psi(\Phi(\alpha)) = \Psi(\varphi \circ f^\bullet\alpha) = f_*(\varphi \circ f^\bullet\alpha) \circ \psi$, luego,

$$\begin{aligned}\Psi(\Phi(\alpha))(V)(s) &= f_*(\varphi \circ f^\bullet\alpha)(V) \circ \psi(V)(s) = (\varphi \circ f^\bullet\alpha)(f^{-1}(V))\big(\psi(V)(s)\big)\\ &= \varphi(f^{-1}(V)) \circ f^\bullet\alpha(f^{-1}(V))(\psi(V)(s))\\ &= \varphi(f^{-1}(V))\big(f^\bullet\alpha(f^{-1}(V))\langle V, s\rangle\big)\\ &= \varphi(f^{-1}(V))\langle V, \alpha(V)(s)\rangle\\ &= \alpha(V)(s)|_{f^{-1}(V)} = \alpha(V)(s)\,,\end{aligned}$$

así $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_Y(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})}$. Esto termina la prueba. □

Lema 3.1.25. *Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de X y sean $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ haces sobre X. Asumimos que tenemos isomorfismos $\varphi_i\colon \mathcal{F}|_{U_i} \to \mathcal{G}|_{U_i}$ satisfaciendo $\varphi_i|_{U_i\cap U_j} = \varphi_j|_{U_i\cap U_j}$ para todo $i, j \in I$. Entonces existe un isomorfismo $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ tal que $\varphi|_{U_i} = \varphi_i$ para todo $i \in I$.*

Demostración. Por hipótesis tenemos $\varphi_i|_{U_i\cap U_j} = \varphi_i|_{U_i\cap U_j}$ para todo $i, j \in I$. Luego como $\mathcal{H}\mathrm{om}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es haz (Proposición 3.1.23), existe un morfismo $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ tal que $\varphi|_{U_i} = \varphi_i$ para todo $i \in I$. Puesto que φ es un isomorfismo local, por la Proposición 3.1.7, lo es globalmente. □

Proposición 3.1.26 (Pegamiento de haces)**.** *Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de X. Para cada $i \in I$ sea $\mathcal{F}_i$ un haz sobre U, y para cada par $i, j \in I$ sean $\theta_{ij}\colon \mathcal{F}_j|_{U_{ij}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_i|_{U_{ij}}$ isomorfismos satisfaciendo las propiedades:*

(i) $\theta_{ii} = \mathrm{id}$ *sobre U_i para todo $i \in I$.*

(ii) *(condición de pegamiento) $\theta_{ik} = \theta_{ij} \circ \theta_{jk}$ sobre U_{ijk} para todo $i, j, k \in I$.*

Entonces existe un único haz $\mathcal{F}$ sobre X cuya restricción a cada U_i es isomorfo a $\mathcal{F}_i$ vía isomorfismos $\theta_i\colon \mathcal{F}|_{U_i} \to \mathcal{F}_i$, tal que

$$\theta_i|_{U_{ij}} = \theta_{ij} \circ \theta_j|_{U_{ij}}\,,$$

para todo $i, j \in I$. En este caso se dice que $\mathcal{F}$ es obtenido por pegamiento *de los haces $\mathcal{F}_i$ por medio de los morfismos θ_{ij}.*

Demostración. Primeramente veamos la existencia de tal haz $\mathcal{F}$. Para cada abierto U de X, definimos $\mathcal{F}(U)$ como el subgrupo $\prod_{i\in I} \mathcal{F}_i(U \cap U_i)$ consistiendo de familias $(s_i)_{i\in I}$ tal que para cada $(i, j) \in I \times I$, $\theta_{ij}(U \cap U_{ij})(s_j|_{U\cap U_{ij}}) = s_i|_{U\cap U_{ij}}$. Para dos abiertos $V \subseteq U$ de X, definimos los homomorfismos $\rho_{UV}\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ por la aplicación

$$(s_i)_{i\in I} \mapsto (s_i|_{V\cap U_i})_{i\in I}\,.$$

A partir de la definición es inmediato verificar que $\rho_{UU} = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(U)}$ y $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$ para tres abiertos $W \subseteq V \subseteq U$ de X, así $\mathcal{F}$ es un prehaz de grupos abelianos. Afirmamos que $\mathcal{F}$ es un haz. En efecto, sea un cubrimiento abierto $\{V_\alpha\}_{\alpha\in J}$ de un abierto U de X y sea $(s_i)_i \in \mathcal{F}(U)$ tal que restringido a cada V_α es cero; de la definición y de esta condición tenemos que $s_i|_{V_\alpha\cap U_i} = 0$ para todo $i \in I$ y $\alpha \in J$, luego puesto que $\mathcal{F}_i$ es haz y $\{V_\alpha \cap U_i\}_{\alpha\in J}$ es un cubrimiento de $U \cap U_i$, tenemos $s_i = 0$ para cada $i \in I$, por tanto $(s_i)_i$ es cero. Por otra parte, con la notación anterior, supongamos que tenemos secciones $t_\alpha = (s_{i\alpha})_i \in \mathcal{F}(V_\alpha)$ para todo $\alpha \in J$ tal que $t_\alpha|_{V_{\alpha\beta}} = t_\beta|_{V_{\alpha\beta}}$ para todo $\alpha, \beta \in J$. Entonces tenemos que $s_{i\alpha} \in \mathcal{F}(V_\alpha \cap U_i)$ tal que $s_{i\alpha}|_{V_{\alpha\beta}\cap U_i} = s_{i\beta}|_{V_{\alpha\beta}\cap U_i}$ para todo $i \in I$ y $\alpha, \beta \in J$, luego puesto que $\mathcal{F}_i$ es haz y $\{V_\beta \cap U_i\}_{\beta\in J}$ es un cubrimiento de $U \cap U_i$, existe $s_i \in \mathcal{F}_i(U \cap U_i)$ tal que $s_i|_{V_\alpha \cap U_i} = s_{i\alpha}$ para todo $\alpha \in J$. Afirmamos que $t = (s_i)_i \in \mathcal{F}(U)$. En efecto, desde que $(s_{i\alpha})_i \in \mathcal{F}(V_\alpha)$ tenemos la ecuación

$$\theta_{ij}(V_\alpha \cap U_{ij})(s_{j\alpha}|_{V_\alpha\cap U_{ij}}) = s_{i\alpha}|_{V_\alpha \cap U_{ij}}\,, \quad \text{para todo} \quad (i,j) \in I \times I\,,$$

de esta igualdad tenemos $\big(\theta_{ij}(U \cap U_{ij})(s_j|_{U\cap U_{ij}})\big)|_{V_\alpha\cap U_{ij}} = s_i|_{V_\alpha\cap U_{ij}}$ para todo $\alpha \in J$, esto implica que $\theta_{ij}(U\cap U_{ij})(s_j|_{U\cap U_{ij}}) = s_i|_{U\cap U_{ij}}$, así $(s_i)_i \in \mathcal{F}(U)$. Por otro lado, es inmediato verificar que $t|_{V_\alpha} = t_\alpha$ para todo $\alpha \in J$. De esta manera $\mathcal{F}$ es un haz.

A continuación definimos $\theta_j\colon \mathcal{F}|_{U_j} \to \mathcal{F}_j$, para ello tomamos un abierto V en U_j y definimos $\theta_j(V)\colon \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}_j(V)$ como la proyección $(s_i)_i \mapsto s_j$. Este homomorfismo es un isomorfismo, su inversa es el homomorfismo $\sigma_j\colon \mathcal{F}_j(V) \to \mathcal{F}(V)$ definido por $s \mapsto \big(\theta_{ij}(V\cap U_i)(s|_{V\cap U_i})\big)_j$, para la buena definición de este homomorfismo usamos la condición (ii) de pegamiento, y para ver que son inversas usamos la definición de $\mathcal{F}(V)$ y la condición (i). De esta manera los θ_j's son isomorfismos. Por otro lado, dado un abierto V en U_{ij} entonces

$$\theta_{ij}(V) \circ \theta_j(V)((s_k)_k) = \theta_{ij}(V)(s_j) = s_i = \theta_i(V)((s_k)_k)\,,$$

luego tenemos $\theta_i|_{U_{ij}} = \theta_{ij} \circ \theta_j|_{U_{ij}}$.

Ahora veamos la unicidad de $\mathcal{F}$. Sean morfismos $\theta_i\colon \mathcal{F}|_{U_i} \to \mathcal{F}_i$ y $\theta'_i\colon \mathcal{G}|_{U_i} \to \mathcal{F}_i$ tales que $\theta_i|_{U_{ij}} = \theta_{ij} \circ \theta_j|_{U_{ij}}$ y $\theta'_i|_{U_{ij}} = \theta_{ij} \circ \theta'_j|_{U_{ij}}$ para todo i, j. Consideremos los isomorfismos $\theta_i'^{-1} \circ \theta_i\colon \mathcal{F}|_{U_i} \to \mathcal{G}|_{U_i}$, entonces para cada i, j tenemos

$$\begin{aligned}(\theta_i'^{-1} \circ \theta_i)|_{U_{ij}} &= (\theta'_i|_{U_{ij}})^{-1} \circ \theta_i|_{U_{ij}} = (\theta_{ij} \circ \theta'_j|_{U_{ij}})^{-1} \circ (\theta_{ij} \circ \theta_j|_{U_{ij}}) \\ &= (\theta'_j|_{U_{ij}})^{-1} \circ \theta_j|_{U_{ij}} = (\theta_j'^{-1} \circ \theta_j)|_{U_{ij}}\,.\end{aligned}$$

Luego por el Lema 3.1.25 estos isomorfismos se extienden a un isomorfismo $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}$ sobre X.

□

3.2 Esquemas y Morfismos entre Esquemas

Recordamos al lector que un anillo A es un anillo conmutativo con unidad.

Definición 3.2.1. Para cada ideal primo $\mathfrak{p}$ de A, sea $A_\mathfrak{p}$ la localización de A en $\mathfrak{p}$. Dado un subconjunto abierto U no vacío de $X = \operatorname{Spec} A$, definimos $\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}(U)$ como el conjunto de todas las funciones $s\colon U \to \bigsqcup_{\mathfrak{p}\in U} A_\mathfrak{p}$ con $s(\mathfrak{p}) \in A_\mathfrak{p}$ para cada ideal primo $\mathfrak{p}$, tal que s es *localmente un cociente* de elementos de A. Más precisamente, requerimos que para cada $\mathfrak{p} \in U$, exista un entorno abierto V de $\mathfrak{p}$ contenido en U y elementos $a, f \in A$ tal que para cada $\mathfrak{q} \in V$, se tenga $f \notin \mathfrak{q}$ y $s(\mathfrak{q}) = a/f$ en $A_\mathfrak{q}$.

Proposición 3.2.1. *$\mathcal{O}(U)$ tiene estructura de anillo.*

Demostración. Sean dos funciones $s_1, s_2\colon U \to \bigsqcup_\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}(U)$, definimos para cada $\mathfrak{p} \in U$

$$\begin{aligned}(s_1 + s_2)(\mathfrak{p}) &= s_1(\mathfrak{p}) + s_2(\mathfrak{p})\,, \\ (s_1 s_2)(\mathfrak{p}) &= s_1(\mathfrak{p}) s_2(\mathfrak{p})\,.\end{aligned}$$

Tenemos que $s_1 + s_2$ y $s_1 s_2$ son funciones de U en $\bigsqcup_{\mathfrak{p}\in U} A_{\mathfrak{p}}$, pues, para cada $\mathfrak{p} \in U$, $s_1(\mathfrak{p}) + s_2(\mathfrak{p}), s_1(\mathfrak{p})s_2(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}}$. Consideremos ahora $\mathfrak{p} \in U$, para cada i, existe un entorno abierto V_i de $\mathfrak{p}$ contenido en U y elementos $a_i, f_i \in A$ tal que para cada $\mathfrak{q} \in V_i$, $f_i \notin \mathfrak{q}$ y $s_i(\mathfrak{q}) = a_i/f_i$ en $A_{\mathfrak{q}}$ $(i = 1, 2)$.

Sea $V = V_1 \cap V_2 \subseteq U$ el cual es un entorno abierto de $\mathfrak{p}$. Tenemos que $a_1 f_2 + a_2 f_1$ y $f_1 f_2$ son elementos de A, luego para $\mathfrak{q} \in V$ tenemos que $f_1 f_2 \notin \mathfrak{q}$; además $s_1(\mathfrak{q}) = a_1/f_1$ en $A_{\mathfrak{q}}$ y $s_2(\mathfrak{q}) = a_2/f_2$ en $A_{\mathfrak{q}}$. De donde se sigue que

$$(s_1 + s_2)(\mathfrak{q}) = s_1(\mathfrak{q}) + s_2(\mathfrak{q}) = \frac{a_1}{f_1} + \frac{a_2}{f_2} = \frac{a_1 f_2 + a_2 f_1}{f_1 f_2} \quad \text{en } A_{\mathfrak{q}}\,.$$

Por lo tanto, $s_1 + s_2 \in \mathcal{O}(U)$ y de manera similar conseguimos que $s_1 s_2 \in \mathcal{O}(U)$. El cero de $\mathcal{O}(U)$ es la función que hace corresponder a cada $\mathfrak{p} \in U$ el elemento $0/1$ de $A_{\mathfrak{p}}$; además, el inverso de s_1 es la función $-s_1 \in \mathcal{O}(U)$ definida de manera natural; también la unidad en $\mathcal{O}(U)$ es la aplicación $s\colon U \to \bigsqcup_{\mathfrak{p}\in U} A_{\mathfrak{p}}$ definida por $\mathfrak{p} \mapsto 1/1$ en cada $A_{\mathfrak{p}}$. Luego $\mathcal{O}(U)$ tiene estructura de anillo. $\square$

Observación 3.2.1. Si $V \subseteq U$ son dos abiertos en $X = \operatorname{Spec} A$, la restricción natural $\mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V)$ es un homomorfismo de anillos; haciendo $\mathcal{O}(\emptyset) = \{0\}$, tenemos que $\mathcal{O}$ es un prehaz de anillos. Finalmente, de la naturaleza local de la definición tenemos como en el caso de funciones regulares y racionales (sección 1.4) que $\mathcal{O}$ es también un haz de anillos.

En lo que sigue, cuando nos referimos el espectro de un anillo A, nos referiremos al par $(\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})$ donde $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$ es el haz de anillos $\mathcal{O}$ definido anteriormente.

Observación 3.2.2. De la definición 3.1.3 tenemos para cada punto $\mathfrak{p} \in X$ que $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ es un grupo abeliano, y definiendo el producto de dos gérmenes $\langle U, s\rangle, \langle V, t\rangle \in \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ como

$$\langle U, s\rangle . \langle V, t\rangle = \langle U \cap V, s\big|_{U\cap V} \cdot t\big|_{U\cap V}\rangle\,,$$

tenemos que $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ es un anillo que es local como se ve en la Proposición 3.2.3.

Lema 3.2.2. *Sea U abierto de* $\operatorname{Spec} A$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *Para cada $\mathfrak{p} \in U$, existen $a, f \in A$ y un entorno abierto V de $\mathfrak{p}$ contenido en U tal que para todo $\mathfrak{q} \in V$, $f \notin \mathfrak{q}$ y $s(\mathfrak{q}) = a/f$ en $A_{\mathfrak{q}}$.*

(b) *Para cada $\mathfrak{p} \in U$, existen $b, g \in A$ tal que $\mathfrak{p} \in D(g) \subseteq U$ y $s(\mathfrak{q}) = b/g$ en $A_{\mathfrak{q}}$ para todo $\mathfrak{q} \in D(g)$.*

(c) *Para cada $\mathfrak{p} \in U$, existen $c, h \in A$ y un entorno W de $\mathfrak{p}$ contenido en U tal que para todo $\mathfrak{q} \in W$, $h \notin \mathfrak{q}$ y $S(\mathfrak{q}) = c/h$ en $A_{\mathfrak{q}}$.*

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$. Sea $\mathfrak{p} \in U$, luego existen $a, f \in A$ y un entorno abierto V de $\mathfrak{p}$ contenido en U tal que para todo $\mathfrak{q} \in V$, $f \notin \mathfrak{q}$ y $s(\mathfrak{q}) = a/f$ en $A_{\mathfrak{q}}$. Como V es abierto, sea $V = \bigcup_{i=1}^{n} D(g_i)$, puesto que $\mathfrak{p} \in V$ existe g_i tal que $\mathfrak{p} \in D(g_i) \subseteq V \subseteq U$. Sean $b = a g_i$ y $g = f g_i$, donde $b, g \in A$ y $\mathfrak{p} \in D(g) \subseteq D(g_i) \subseteq U$. Luego si $\mathfrak{q} \in D(g) \subseteq V$ tenemos que $s(\mathfrak{q}) = a/f$ en $A_{\mathfrak{q}}$. Se sigue de esto último que $S(\mathfrak{q}) = b/g = a g_i / f g_i$ en $A_{\mathfrak{q}}$ (esto se debe a que $f g_i \notin \mathfrak{q}$; ya que si $f g_i \in \mathfrak{q}$, entonces $f \in \mathfrak{q}$ o $g_i \in \mathfrak{q}$, el primer caso no es posible por hipótesis, mientras que el segundo caso tampoco es posible, pues, $\mathfrak{q} \in D(g) \subseteq D(g_i)$.)

$(b) \Rightarrow (c)$. Es directo considerando $c = b$, $h = g$ y $W = D(g)$.

$(c) \Rightarrow (a)$. Sea $\mathfrak{p} \in U$, existen $c, h \in A$ y un entorno W de $\mathfrak{p}$ contenido en U tal que para todo $\mathfrak{q} \in W$, $h \notin \mathfrak{q}$ y $s(\mathfrak{q}) = c/h$ en $A_\mathfrak{q}$. Desde que W es un entorno de $\mathfrak{p}$ y contenido en W (el cual es entorno abierto); sea $a = c$, $f = h \in A$. Luego si $\mathfrak{q} \in V \subseteq W$, entonces $f \notin \mathfrak{q}$ y $s(\mathfrak{q}) = a/f$ en $A_\mathfrak{q}$. □

Proposición 3.2.3. *Sea A un anillo y* $(\operatorname{Spec} A, \mathcal{O})$ *su espectro. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(a) *Para cualquier* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$*, el tallo $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ del haz $\mathcal{O}$, es isomorfo al anillo local $A_\mathfrak{p}$.*

(b) *Para cualquier elemento $f \in A$, el anillo $\mathcal{O}(D(f))$ es isomorfo al anillo localizado A_f.*

(c) *En particular,* $\Gamma(\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}) \cong A$*.*

Demostración. (a). Fijemos $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$. Dado $\langle U, s\rangle \in \mathcal{O}_\mathfrak{p}$, tenemos que $s \in \mathcal{O}(U)$ y $s(\mathfrak{p}) \in A_\mathfrak{p}$. A continuación definimos

$$\gamma \colon \mathcal{O}_\mathfrak{p} \to A_\mathfrak{p} \quad \text{por} \quad \langle U, s\rangle \mapsto s(\mathfrak{p}) \,,$$

y veamos que esta definición no depende de los representantes. En efecto, sea $\langle U, s\rangle = \langle U', s'\rangle$ en $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$, lo que implica que existe un entorno abierto W de $\mathfrak{p}$ con $W \subseteq U \cap U'$ tal que $s\big|_W = s'\big|_W$; como $\mathfrak{p} \in W$ tenemos que $s(\mathfrak{p}) = s'(\mathfrak{p})$. Por otra parte, γ es un homomorfismo de anillos, pues,

$$\begin{aligned}
\gamma(\langle U, s\rangle + \langle U', s'\rangle) &= \gamma\langle U \cap U', s\big|_{U\cap U'} + s'\big|_{U\cap U'}\rangle \\
&= \gamma\langle U \cap U', (s + s')\big|_{U\cap U'}\rangle \\
&= (s + s')(\mathfrak{p}) = s(\mathfrak{p}) + s'(\mathfrak{p}) \\
&= \gamma\langle U, s\rangle + \gamma\langle U', s'\rangle \,.
\end{aligned}$$

También

$$\begin{aligned}
\gamma(\langle U, s\rangle\langle U', s'\rangle) &= \gamma\langle U \cap U', s\big|_{U\cap U'} s'\big|_{U\cap U'}\rangle \\
&= \gamma\langle U \cap U', (ss')\big|_{U\cap U'}\rangle \\
&= (ss')(\mathfrak{p}) = s(\mathfrak{p})s'(\mathfrak{p}) \\
&= \gamma\langle U, s\rangle\gamma\langle U', s'\rangle \,.
\end{aligned}$$

Veamos que γ es inyectiva. Sean $\langle U, s\rangle, \langle U', s'\rangle$ dos elementos de $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ con $\gamma\langle U, s\rangle = \gamma\langle U', s'\rangle$, es decir, $s(\mathfrak{p}) = s'(\mathfrak{p})$. Como s y s' ambos son localmente cocientes de elementos de A, por el Lema 3.2.2 existe $D(f) \subseteq U$ y $D(f') \subseteq U'$ entornos de $\mathfrak{p}$ y $a, a' \in A$ tal que para cada $\mathfrak{q} \in D(f)$, $s(\mathfrak{q}) = a/f$ en $A_\mathfrak{q}$ y para cada $\mathfrak{q} \in D(f')$, $s'(\mathfrak{q}) = a'/f'$ en $A_\mathfrak{q}$. Como $\mathfrak{p} \in D(f) \cap D(f')$ tenemos que $a/f = s(\mathfrak{p}) = s'(\mathfrak{p}) = a'/f'$ en $A_\mathfrak{p}$, luego existe $h \notin \mathfrak{p}$ tal que $h(f'a - fa') = 0$ en A, es decir, $af'h = a'fh$ en A. Finalmente, para $\mathfrak{q} \in D(ff'h) = D(f) \cap D(f') \cap D(h)$ tenemos que $ff'h \notin \mathfrak{q}$, luego $s(\mathfrak{q}) = a/f = af'h/ff'h = a'fh/f'fh = a'/f' = s'(\mathfrak{q})$ en $A_\mathfrak{q}$ y $D(ff'h) \subseteq U \cap U'$. Por lo tanto, $\langle U, s\rangle = \langle U', s'\rangle$.

Veamos que γ es sobreyectiva. Sea $a/f \in A_\mathfrak{p}$, luego $f \notin \mathfrak{p}$; ahora definimos la aplicación $s \colon D(f) \to \bigsqcup_{\mathfrak{p}\in D(f)} A_\mathfrak{p}$ por $\mathfrak{q} \mapsto a/f$, entonces $s \in \mathcal{O}(D(f))$ y $\langle D(f), s\rangle \in \mathcal{O}_\mathfrak{p}$ con $\gamma\langle D(f), s\rangle = a/f$.

(b). Sea $f \in A$ y definimos $\psi\colon A_f \to \mathcal{O}(D(f))$ por $a/f^n \mapsto s$, donde $s\colon D(f) \to \bigsqcup_{\mathfrak{p}\in D(f)} A_{\mathfrak{p}}$ es la aplicación $\mathfrak{p} \mapsto [a/f^n]$, siendo este último la imagen de a/f^n en $A_{\mathfrak{p}}$.

Mostremos primero que ψ es inyectiva. Sean $a/f^n, b/f^m \in A_f$ tal que $\psi(a/f^n) = \psi(b/f^m)$, entonces para cada $\mathfrak{p} \in D(f)$, a/f^n y b/g^m tienen la misma imagen en $A_{\mathfrak{p}}$, es decir, $[a/f^n] = [b/f^m]$; por tanto existe $h \notin \mathfrak{p}$ tal que $h(f^m a - f^n b) = 0$ en A. Sea $\mathfrak{a} = Anu(f^m a - f^n b)$, luego $h \in \mathfrak{a}$ y $h \notin \mathfrak{p}$, o sea, $\mathfrak{a} \nsubseteq \mathfrak{p}$. Pero esto se tiene para todo $\mathfrak{p} \in D(f)$; así, $V(\mathfrak{a}) \cap D(f) = \emptyset$ lo cual implica $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(f)$, que de acuerdo al Corolario 2.3.3 se tiene $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}$, esto es, alguna potencia $f^l \in \mathfrak{a}$, esto implica que $f^l(f^m a - f^n b) = 0$ lo que sigue $a/f^n = b/f^m$ en A_f, es decir, ψ es inyectiva.

Veamos a continuación que ψ es sobreyectiva. Sea $s \in \mathcal{O}(D(f))$ y sea $D(f) = \bigcup_{i=1}^r D(h_i)$ (que podemos escribir por la afirmación (e) de la Proposición 2.3.5 y donde los h_i vienen de la definición 3.2.1 junto con el Lema 3.2.2). Sabemos que para cada i, la sección s es representada por a_i/h_i en $D(h_i)$; así que en $D(h_i)\cap D(h_i) = D(h_i h_j)$ tenemos dos elementos de $A_{h_i h_j}$, es decir, a_i/h_i y a_j/h_j donde ambos representan a s. De acuerdo a la inyectividad de ψ restricto a $D(h_i h_j)$ debemos tener que $a_i/h_i = a_j/h_j$ en $A_{h_i h_j}$. Luego, para algún n

$$(h_i h_j)^n (a_i h_j - a_j h_i) = 0\,.$$

Tomamos n suficientemente grande para trabajar con todo par de índices i, j; de esta manera reescribiendo tenemos

$$h_j^{n+1}(h_i^n a_i) - h_i^{n+1}(h_j^n a_j) = 0\,.$$

Sea $a'_i = a_i h_i^n$, $h'_i = h_i^{n+1}$ para $i = 1,\ldots,r$. Desde que $s = a_i h_i^n / h_i^{n+1}$ en $D(h'_i) = D(h_i^{n+1})$, entonces tenemos que $a'_i h'_j = a'_j h'_i$ en A y también $D(f) = \bigcup_{i=1}^r D(h'_i)$. Sigue por Corolario 2.3.3 que $f \in \sqrt{\langle h'_1,\ldots,h'_r\rangle}$. Sea l un entero positivo tal que $f^l \in \langle h'_1,\ldots,h'_r\rangle$, luego $f^l = \sum_{i=1}^r b_i h'_i$. A continuación hacemos $a = \sum_{i=1}^r b_i a'_i$, luego conseguimos

$$f^l a'_j = \sum_{i=1}^r (b_i h'_i) a'_j = \sum_{i=1}^r (b_i a'_i) h'_j = a h'_j,$$

esto es,

$$s = a'_j/h'_j = a/f^l \ \text{ en } \ D(h'_j) = D(h_j^{n+1}) = D(h_j) \quad \text{para cada} \quad j = 1,\ldots,r\,.$$

Por lo tanto, $\psi(a/f^l) = s$ en $D(f)$. Esto muestra que ψ es sobreyectiva y por tanto un isomorfismo.

(c). Notemos que este es un caso especial de (b). Para ello hacemos $f = 1$ y $D(1) = \operatorname{Spec} A$, luego $\Gamma(\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}) = \mathcal{O}(\operatorname{Spec} A) \cong A_1 \cong A$. □

Definición 3.2.2. Un *espacio anillado* es un par $(X, \mathcal{O}_X)$ consistiendo de un espacio topológico X y un haz de anillos $\mathcal{O}_X$ sobre X. Un *morfismo* de espacios anillados de $(X, \mathcal{O}_X)$ a $(Y, \mathcal{O}_Y)$ es un par $(f, f^\sharp)$ formado por una aplicación continua $f\colon X \to Y$ y un morfismo $f^\sharp\colon \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ de haces de anillos sobre Y.

Si $(f, f^\sharp)\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ y $(g, g^\sharp)\colon (Y, \mathcal{O}_Y) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ son dos morfismos de espacios anillados, entonces tenemos las composiciones

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \quad , \quad \mathcal{O}_Z \xrightarrow{g^\sharp} g_*\mathcal{O}_Y \xrightarrow{g_*(f^\sharp)} (g\circ f)_*\mathcal{O}_X\,.$$

Esto nos permite definir la *composición* de $(f, f^\sharp)$ y $(g, g^\sharp)$ como el morfismo

$$(h, h^\sharp)\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Z, \mathcal{O}_Z)\,,$$

donde $h := g \circ f$ y $h^\sharp := g_*(f^\sharp) \circ g^\sharp$. Un morfismo $(f, f^\sharp)\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (X, \mathcal{O}_X)$ es el morfismo *identidad* si $f = \mathrm{id}_X$ y $f^\sharp = \mathrm{id}_{\mathcal{O}_X}$. Luego, los espacios anillados junto con los morfismos de espacios anillados forman un categoría.

Un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ es un *espacio localmente anillado* si para cada punto $p \in X$, el tallo $\mathcal{O}_{X,p}$ es un anillo local.

Un *morfismo* de espacios localmente anillados es un morfismo $(f, f^\sharp)$ de espacios anillados, tal que para cada punto $p \in X$, la aplicación inducida de anillos locales $f_p^\sharp\colon \mathcal{O}_{Y,f(p)} \to \mathcal{O}_{X,p}$ es un homomorfismo local. Expliquemos la procedencia de este homomorfismo: dado un punto $p \in X$, el morfismo de haces $f^\sharp\colon \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ induce un homomorfismo de anillos $\mathcal{O}_Y(V) \to f_*\mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$ para todo conjunto abierto V de Y, variando V sobre todos los entornos abiertos de $f(p)$, entonces $f^{-1}(V)$ varía sobre un subconjuntos de los entornos de p, y tomando límites obtenemos

$$\mathcal{O}_{Y,f(p)} = \varinjlim_V \mathcal{O}_Y(V) \to \varinjlim_V \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) \hookrightarrow \mathcal{O}_{X,p}\,.$$

De esta manera tenemos un homomorfismo de anillos $f_p^\sharp\colon \mathcal{O}_{Y,f(p)} \to \mathcal{O}_{X,p}$. Luego, los espacios localmente anillados junto con los morfismos de espacios localmente anillados forman una subcategoría de la categoría de los espacios anillados.

Observación 3.2.3. Un morfismo $(f, f^\sharp)\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ de espacios anillados es un isomorfismo si, y sólo si, f es un homeomorfismo y $f^\sharp$ es un isomorfismo de haces. En efecto, si $(f, f^\sharp)$ es un isomorfismo, entonces existe un morfismo $(g, g^\sharp)\colon (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ tal que

$$(g, g^\sharp) \circ (f, f^\sharp) = (\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_{\mathcal{O}_X}) \quad \text{y} \quad (f, f^\sharp) \circ (g, g^\sharp) = (\mathrm{id}_Y, \mathrm{id}_{\mathcal{O}_Y})\,,$$

de donde tenemos $g \circ f = \mathrm{id}_X$, $f \circ g = \mathrm{id}_Y$, es decir f es un homeomorfismo. Además tenemos las igualdades $g_*(f^\sharp) \circ g^\sharp = \mathrm{id}_{\mathcal{O}_X}$, $f_*(g^\sharp) \circ f^\sharp = \mathrm{id}_{\mathcal{O}_Y}$, aplicando el funtor f_* a la penúltima igualdad, obtenemos $f^\sharp \circ f_*(g^\sharp) = \mathrm{id}_{\mathcal{O}_Y}$, lo que implica que $f^\sharp$ es un isomorfismo. La parte recíproca es inmediato.

Proposición 3.2.4. *Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(a) *Si A es un anillo, entonces* $(\mathrm{Spec}\ A, \mathcal{O})$ *es un espacio localmente anillado.*

(b) *Si $\varphi\colon A \to B$ es un homomorfismo de anillos, entonces φ induce un morfismo natural de espacios localmente anillados*

$$(f, f^\sharp)\colon (\mathrm{Spec}\ B, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\ B}) \to (\mathrm{Spec}\ A, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\ A}).$$

(c) *Si A y B son anillos, entonces cualquier morfismo de espacios localmente anillados de* $\mathrm{Spec}\ B$ *a* $\mathrm{Spec}\ A$*, es inducido por un homomorfismo de anillos $\varphi\colon A \to B$ como en* (b).

Demostración. (a). Es la primera afirmación de la Proposición 3.2.3.

(b). Definimos $f\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ por $\mathfrak{q} \mapsto \mathfrak{q}^c$ la cual es continua debido a la segunda afirmación de la Proposición 2.3.6. Por otro lado, si $\varphi_{\mathfrak{q}}\colon A_{\mathfrak{q}^c} \to B_{\mathfrak{q}}$ es el homomorfismo inducido en los respectivos anillos locales, es claro que $\varphi_{\mathfrak{q}}^{-1}(\mathfrak{q}B_{\mathfrak{q}}) = \mathfrak{q}^c A_{\mathfrak{q}^c}$, o sea que

$$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A,\mathfrak{q}^c} \cong A_{\mathfrak{q}^c} \stackrel{\varphi_{\mathfrak{q}}}{\to} B_{\mathfrak{q}} \cong \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B,\mathfrak{q}} \tag{3.2.2}$$

es un homomorfismo local de anillos locales. Vamos a definir a continuación un morfismo de haces de anillos $f^\sharp\colon \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A} \to f_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}$. Tomemos un abierto $U \subseteq \operatorname{Spec} A$ y definimos

$$f^\sharp(U)\colon \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(U) \to \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}(f^{-1}(U)) \quad \text{por} \quad s \mapsto f^\sharp(U)(s)\,,$$

donde $f^\sharp(U)(s)\colon f^{-1}(U) \to \bigsqcup_{\mathfrak{q}\in f^{-1}(U)} B_{\mathfrak{q}}$ está definida por $\mathfrak{q} \mapsto \varphi_{\mathfrak{q}}(s(\mathfrak{q}^c))$. Entonces $f^\sharp(U)$ es un homomorfismo de anillos; también, dado abiertos $V \subseteq U$, $s \in \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(U)$ y $\mathfrak{q} \in f^{-1}(V)$, entonces

$$\begin{aligned}(f^\sharp(U)(s)\big|_{f^{-1}(V)})(\mathfrak{q}) &= f^\sharp(U)(s)(\mathfrak{q}) = \varphi_{\mathfrak{q}}(s(\mathfrak{q}^c)) \\ &= \varphi_{\mathfrak{q}}(s\big|_V(\mathfrak{q}^c)) = f^\sharp(V)(s\big|_V)(\mathfrak{q})\,.\end{aligned}$$

Esto muestra que $f^\sharp\colon \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A} \to f_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}$ es un morfismo de haces de anillos, y por la relación (3.2.2) se tiene que $f^\sharp_{\mathfrak{q}}\colon \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A,\mathfrak{q}^c} \to f_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B,\mathfrak{q}}$ es un homomorfismo local de anillos locales.

(c). Sea $(f, f^\sharp)\colon (\operatorname{Spec} B, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}) \to (\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})$ un morfismo de espacios localmente anillados y definimos

$$\varphi := f^\sharp(\operatorname{Spec} A)\colon A \cong \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(\operatorname{Spec} A) \to \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}(\operatorname{Spec} B) \cong B\,.$$

□

Definición 3.2.3 (Los esquemas)**.** Un *esquema afín* es un espacio localmente anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ que es isomorfo al espectro de algún anillo como espacio localmente anillado. Un *esquema* es un espacio localmente anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ tal que cada punto tiene un entorno abierto U de manera que el espacio anillado $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ es un esquema afín. Si $(X, \mathcal{O}_X)$ es un esquema, llamaremos a X su *espacio topológico subyacente* de dicho esquema, y a $\mathcal{O}_X$ su *haz estructural*, por abuso de notación muchas veces escribiremos X en lugar de $(X, \mathcal{O}_X)$, en este caso escribiremos $sp(X)$ para denotar al espacio topológico subyacente, y si no hay confusión escribiremos simplemente X para denotar tanto al esquema y como a su espacio topológico subyacente. Un *morfismo* de esquemas es un morfismo como espacio espacios localmente anillados. Luego, los esquemas juntos con los isomorfismo de esquemas forman una categoría que denotaremos por $\mathfrak{Sch}$.

Lema 3.2.5. *Sea $\varphi\colon A \to B$ un homomorfismo de anillos, $X = \operatorname{Spec} B$, $Y = \operatorname{Spec} A$ y sea $f\colon X \to Y$ el morfismo de esquemas inducido por φ. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(a) *φ es inyectivo si, y sólo si, el morfismo $f^\sharp\colon \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ es inyectiva. Además, en este caso la aplicación f es dominante, es decir $f(X)$ es denso en Y.*

(b) *φ es sobreyectiva si, y sólo si, f es un homeomorfismo de X sobre su imagen y $f^\sharp\colon \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ es sobreyectiva.*

Demostración. (a). Si $\varphi\colon A \to B$ es inyectiva entonces para todo $g \in A$, el homomorfismo $\varphi_g\colon A_g \to B_{\varphi(g)}$ dado por $\frac{a}{g^k} \mapsto \frac{\varphi(a)}{\varphi(g)^k}$ es también inyectiva, en efecto, si $\frac{\varphi(a)}{\varphi(g)^k} = 0$ entonces $\varphi(g)^n\varphi(a) = 0$ para algún $n \geq 0$, luego $\varphi(g^n a) = 0$, y puesto que φ es inyectiva tenemos que $g^n a = 0$, lo que muestra que φ_g es inyectiva. Veamos ahora que $f^\sharp\colon \mathcal{O}_X \to f_*(\mathcal{O}_X)$ es inyectiva, en efecto, por la Proposición 2.3.6 tenemos que $f^{-1}(D_A(g)) = D_B(\varphi(g))$ y debido a que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(D_A(g)) \arrow[r, "f^\sharp(D_A(g))"] \arrow[d, Rightarrow] & \mathcal{O}_Y(D_B(\varphi(g))) \arrow[d, Rightarrow] \\
A_g \arrow[r, "\varphi_g"'] & B_{\varphi(g)}
\end{tikzcd}$$

es conmutativo donde las flechas verticales son los isomorfismos naturales, tenemos $f^\sharp(D_A(g))$ es inyectiva para todo $g \in A$, esto implica que $f^\sharp$ es inyectiva. Recíprocamente si $f^\sharp$ es inyectiva, entonces $f^\sharp(D_A(1)))$ es inyectiva, y del diagrama anterior tenemos que φ es inyectiva considerando $A_1 = A$, $B_1 = B$ y $\varphi_1 = \varphi$.

Supongamos ahora que φ es inyectiva y veamos que $f(X)$ es denso en Y. Para ello bastará ver que cada abierto no vacío $D_A(g) \subseteq Y$ contiene puntos de $f(X)$. En efecto, supongamos que $D_A(g) \cap f(X) = \emptyset$ para algún $g \in A$, entonces $g \notin f(\mathfrak{p})$ para todo $\mathfrak{p} \in X$ luego $\varphi(g) \notin \mathfrak{p}$ para todo primo $\mathfrak{p}$ de B, es decir $\varphi(g)$ es un elemento del nilradical de B por tanto $\varphi(g)^n = 0$ para algún $n \geq 0$. Ahora como φ es inyectiva, tenemos que $g^n = 0$, esto implica que $D_A(g)$ es vacío, que es una contradicción.

(b). Si φ es sobreyectiva, entonces el homomorfismo φ_g dado en (a), es claramente sobreyectiva para todo $g \in A$, luego del diagrama anterior se sigue que $f^\sharp(D_A(g))$ es sobreyectiva para todo $g \in A$, esto implica que $f^\sharp$ es sobreyectiva. Por otro lado, por la parte (d) de la Proposición 2.3.6, f es un homeomorfismo de X sobre el subconjunto cerrado $V(\operatorname{Nuc} \varphi) \subseteq Y$. Veamos la parte reciproca. El diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr] & & B \\
& A/\operatorname{Nuc} \varphi \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

induce un diagrama conmutativo en los espectros

$$\begin{tikzcd} X = \operatorname{Spec} B \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\phi"'] & & \operatorname{Spec} A = Y \\ & X' = \operatorname{Spec}(A/\operatorname{Nuc}\varphi) \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Puesto que el homomorfismo $A/\operatorname{Nuc}\varphi \to B$ es inyectivo, por la parte (a) el morfismo ϕ es dominante, y puesto que $A \to A/\operatorname{Nuc}\varphi$ es sobreyectiva, por la anterior tenemos que $\psi^\sharp$ es sobreyectiva y ψ es un homeomorfismo sobre un subconjunto cerrado Z de $Y = \operatorname{Spec} A$. Afirmamos que $(\phi, \phi^\sharp)$ es un isomorfismo, en efecto, como ψ es un homeomorfismo sobre Z y $f(X) = \psi(\phi(X))$ es un cerrado de Y contenido en Z (luego un cerrado de Z), tenemos que $\phi(X)$ es cerrado en X', y como $\phi(X)$ es denso en X', tenemos que $\phi(X) = X'$, además puesto que $f\colon X \to Z$ y $\psi\colon X' \to Z$ son homeomorfismos, obtenemos que ϕ es homeomorfismo. Veamos ahora que $\phi^\sharp$ es un isomorfismo, la inyectividad de $\phi^\sharp$ se sigue por (a) desde que el homomorfismo $A/\operatorname{Nuc}\varphi \to B$ es inyectivo. Por otro lado, el morfismo $f^\sharp$ se factoriza en $\mathcal{O}_Y \overset{\psi^\sharp}{\to} \psi_*(\mathcal{O}_{X'}) \overset{\psi_*(\phi^\sharp)}{\to} f_*(\mathcal{O}_X)$, es decir $f^\sharp = \psi_*(\phi^\sharp) \circ \psi^\sharp$, donde $f^\sharp$ y $\psi^\sharp$ son sobreyectivas, entonces $\psi_*(\phi^\sharp)$ es sobreyectiva, además como ψ es un homeomorfismo, el funtor ψ_* es un isomorfismo, entonces $\phi^\sharp$ es sobreyectiva. De esta manera, $\operatorname{Spec} B \cong \operatorname{Spec}(A/\operatorname{Nuc}\varphi)$ como esquemas, esto implica que el homomorfismo $A/\operatorname{Nuc} \to B$ es un isomorfismo, de donde se sigue que φ es sobreyectiva. $\square$

Para lo que sigue, recordemos que un anillo graduado S es un anillo graduado de grados positivos.

Definición 3.2.4 (El esquema Proj S)**.** Definimos un haz de anillos $\mathcal{O}$ sobre Proj S, como sigue: para cualquier subconjunto abierto $U \subseteq \operatorname{Proj} S$, $\mathcal{O}(U)$ es el conjunto de funciones $s\colon U \to \bigsqcup_{\mathfrak{p}\in U} S_{(\mathfrak{p})}$ tal que para cada $\mathfrak{p} \in U$, $s(\mathfrak{p}) \in S_\mathfrak{p}$ y tal que s es localmente un cociente de elementos de S, es decir, para cada $\mathfrak{p} \in U$ existe un entorno abierto V de $\mathfrak{p}$ en U y elementos homogéneos $a, f \in S$ del mismo grado, tal que para cada $\mathfrak{q} \in V$, $f \notin \mathfrak{q}$ y $s(\mathfrak{q}) = a/f$ en $S_{(\mathfrak{q})}$.

Cuando nos referimos al espectro proyectivo de S, nos referiremos al espacio anillado $(\operatorname{Proj} S, \mathcal{O})$.

La siguiente proposición muestra que $(\operatorname{Proj} S, \mathcal{O})$ es un esquema.

Proposición 3.2.6. *Sea S un anillo graduado. Se cumplen:*

(a) *Para cualquier $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} S$, el tallo $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ es isomorfo al anillo local $S_{(\mathfrak{p})}$.*

(b) *Para cualquier elemento homogéneo $f \in S_+$, tenemos un isomorfismo de espacios localmente anillados, $(D_+(f), \mathcal{O}|_{D_+(f)}) \cong \operatorname{Spec}(S_{(f)})$.*

(c) Proj S *es un esquema.*

Demostración. (a). Dado $\mathfrak{p} \in X$, definimos la aplicación de $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ en $S_{(\mathfrak{p})}$, dado por $\langle U, s\rangle \mapsto s(\mathfrak{p})$. Probar que esta aplicación es un isomorfismo, es similar a lo que ya hemos probado en la Proposición 3.2.3(a).
(b). Supongamos que $f \in S_+$ es un elemento homogéneo de grado d. Definimos la aplicación $\varphi\colon D_+(f) \to \operatorname{Spec} S_{(f)}$ dada por $\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p}S_f \cap S_{(f)}$. Esta aplicación resulta ser un homeomorfismo de $D_+(f)$ sobre $\operatorname{Spec} S_{(f)}$. En efecto, la inyectividad de φ es inmediato del ítem (b) del lema anterior. Para la sobreyectividad, tomemos $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} S_{(f)}$. Como $\mathfrak{q}$ es ideal radical de $S_{(f)}$, por el ítem (b) del lema anterior, existe un ideal radical homogéneo $\mathfrak{p}$ de S tal que $\mathfrak{p}S_f \cap S_{(f)} = \mathfrak{q}$ donde $\mathfrak{p} = \sqrt{\langle T\rangle} \subseteq S$ y T es el conjunto de elementos homogéneos $a \in S$ tal que $\frac{a}{f^k} \in \mathfrak{q}$ para algún $k \geq 0$. Afirmamos que el ideal $\mathfrak{p}$ es primo, en efecto, dado dos elementos homogéneos $b, c \in S$ con $\partial(b) = d_1$ y $\partial(c) = d_2$ tal que $bc \in \mathfrak{p}$. Entonces por la definición de $\mathfrak{p}$ existe $n \geq 1$ tal que $(bc)^n = \sum_i \lambda_i a_i$ donde $\lambda_i \in S$, $a_i \in T$ y $\frac{a_i}{f^{k_i}} \in \mathfrak{q}$ para algún $k_i \geq 0$. Luego tenemos

$$(\frac{b^d}{f^{d_1}}\frac{c^d}{f^{d_2}})^n = \frac{(bc)^{dn}}{f^{(d_1+d_2)n}} = \frac{(\sum_i \lambda_i a_i)^d}{f^{(d_1+d_2)n}} = \frac{1}{f^{(d_1+d_2)n}}(\sum_i \frac{f^{k_i}\lambda_i}{1}\frac{a_i}{f^{k_i}})^d \in \mathfrak{q}\,,$$

y como $\mathfrak{q}$ es primo tenemos que $\frac{b^d}{f^{d_1}} \in \mathfrak{q}$ o $\frac{c^d}{f^{d_2}} \in \mathfrak{q}$. Luego $b^d \in T$ o $c^d \in T$ y por tanto $b \in \mathfrak{p}$ o $c \in \mathfrak{p}$. Para verificar que $S_+ \nsubseteq \mathfrak{p}$ y $\mathfrak{p} \in D_+(f)$, basta ver que $f \notin \mathfrak{p}$ ya que $f \in S_+$, en efecto, si $f \in \mathfrak{p}$, entonces para algún $n \geq 1$, $f^n = \sum_i \lambda_i a_i$ donde $\lambda_i \in S$ y $a_i \in T$ con $\frac{a_i}{f^{k_i}} \in \mathfrak{q}$ para todo i, luego $\frac{1}{1} = \frac{f^n}{f^n} = \sum_i \frac{f^{k_i}\lambda_i}{1}\frac{a_i}{f^{k_i}} \in \mathfrak{q}$, lo cual es imposible puesto que $\mathfrak{q}$ es primo. De esta manera concluimos que φ es sobreyectiva y luego biyectiva. Mostremos ahora, que φ es aplicación cerrada y continua. Dado un ideal radical homogéneo $\mathfrak{a}$ de S, afirmamos que $\varphi(V(\mathfrak{a}) \cap D_+(f)) = V(\mathfrak{a}S_f \cap S_{(f)})$, en efecto, dado $\mathfrak{q} \in \varphi(V(\mathfrak{a}) \cap D_+(f))$ entonces $\mathfrak{q} = \varphi(\mathfrak{p})$ para algún $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}) \cap D_+(f)$, luego la condición $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ implica que $\mathfrak{a}S_f \cap S_{(f)} \subseteq \mathfrak{p}S_f \cap S_{(f)} = \varphi(\mathfrak{p}) = \mathfrak{q}$ por tanto $\mathfrak{q} \in V(\mathfrak{a}S_f \cap S_{(f)})$. Recíprocamente dado $\mathfrak{q} \in V(\mathfrak{a}S_f \cap S_{(f)})$, entonces $\mathfrak{a}S_f \cap S_{(f)} \subseteq \mathfrak{q}$, luego como φ es sobreyectiva, existe $\mathfrak{p} \in D_+(f)$ tal que $\varphi(\mathfrak{p}) = \mathfrak{q}$, entonces $\mathfrak{a}S_f \cap S_{(f)} \subseteq \mathfrak{p}S_f \cap S_{(f)}$. Por el ítem ($a$) del lema anterior tenemos que $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$, o sea $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$ y como $\mathfrak{p} \in D_+(f)$, tenemos que $\mathfrak{q} = \varphi(\mathfrak{p}) \in \varphi(V(\mathfrak{a}) \cap D_+(f))$. La igualdad de la afirmación anterior nos dice que la aplicación φ es cerrada. Por otro lado, si I es un ideal radical de $S_{(f)}$, por el lema anterior, existe un ideal radical homogéneo $\mathfrak{a}$ de S tal que $\mathfrak{a}S_f \cap S_{(f)} = I$. Reemplazando esta igualdad en la igualdad de la afirmación anterior, tenemos que $\varphi(V(\mathfrak{a}) \cap D_+(f)) = V(I)$, luego $\varphi^{-1}(V(I)) = V(\mathfrak{a}) \cap D_+(f)$ que es un subconjunto cerrado en $D_+(f)$, por tanto φ es continua.
A continuación definiremos el morfismo $\varphi^\sharp\colon \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S_{(f)}} \to \varphi(\mathcal{O}_{\operatorname{Proj} S}\big|_{D_+(f)})$. Para cada $\mathfrak{p} \in D_+(f)$ el homomorfismo $\psi_{\mathfrak{p}}\colon (\operatorname{Spec} S_{(f)})_{\mathfrak{p}} \to S_{(\mathfrak{p})}$ dado por $\frac{a/f^r}{b/f^s} \mapsto \frac{af^s}{bf^r}$ es un isomorfismo, con inverso $\psi_{\mathfrak{p}}^{-1}\colon S_{(\mathfrak{p})} \to (\operatorname{Spec} S_{(f)})_{\mathfrak{p}}$ dado por $\frac{a}{b} \mapsto \frac{ab^{d-1}/f^e}{b^d/f^e}$ donde $d = \partial(f)$ y $e = \partial(a) = \partial(b)$. Dado un subconjunto abierto $U \subseteq \operatorname{Spec} S_{(f)}$, definimos

$$\varphi^\sharp(U)\colon \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S_{(f)}}(U) \to \mathcal{O}_{\operatorname{Proj} S}(\varphi^{-1}(U))$$

como $\varphi^\sharp(U)(s)(\mathfrak{p}) = \psi_{\mathfrak{p}}(s(\varphi(\mathfrak{p})))$ para todo $\mathfrak{p} \in \varphi^{-1}(U)$ y para todo $s \in \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S_{(f)}}(U)$. Es inmediato de la definición, probar que $\varphi^\sharp(U)$ es un isomorfismo de anillos, por tanto $\varphi^\sharp$ es un isomorfismo. Finalmente $\varphi^\sharp_{\mathfrak{p}}\colon \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S_{(f)},\varphi(\mathfrak{p})} \to \mathcal{O}_{\operatorname{Proj} S,\mathfrak{p}}$ es un homomorfismo local puesto el siguiente diagrama, donde las flechas verticales son los isomorfismos naturales,

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S_{(f)},\varphi(p)} \arrow[r, "\varphi_p^\sharp"] \arrow[d] & \mathcal{O}_{\operatorname{Proj} S,p} \arrow[d] \\
(S_{(f)})_{\varphi(p)} \arrow[r, "\psi_{\mathfrak{p}}"] & S_{(\mathfrak{p})}
\end{tikzcd}$$

es conmutativo y $\psi_{\mathfrak{p}}$ es local.
(c). Se sigue inmediatamente desde que, para cada $f \in S_+$ homogéneo, los subconjuntos $D_+(f)$ son abiertos básicos de $\operatorname{Proj} S$ y $D_+(f) \cong \operatorname{Spec} S_{(f)}$. □

Ejemplo 3.2.7. Si A es un anillo, definimos el *n-espacio proyectivo* sobre A como el esquema $\mathbf{P}^n_A := \operatorname{Proj} A[x_0, \dots, x_n]$. Si A es un cuerpo algebraicamente cerrado, el subespacio de puntos cerrados de $\mathbf{P}^n_k$ es homeomorfo al n-espacio proyectivo definido en el capítulo 1 (ver Proposición 3.3.5).

3.3 Correspondencia de variedades y esquemas

En esta sección construiremos un funtor plenamente fiel

$$t\colon \mathfrak{Var}(k) \to \mathfrak{Sch}(k)\,,$$

de la categoría de variedades algebraicas sobre k en la categoría de esquemas sobre k, y veremos que el espacio topológico de una variedad V es homeomorfo al conjunto de puntos cerrados de $sp(t(V))$.

Definición 3.3.1. Sea S un esquema. Un *esquema sobre S* (o un *S-esquema*) es un esquema X, junto con un morfismo de esquemas $\varphi\colon X \to S$. Se dice que S es el *esquema base* y el morfismo φ es el *morfismo estructural* del S-esquema X. Si X, Y son S-esquemas, un morfismo de esquemas $f\colon X \to Y$ es un *morfismo de S*-esquemas, si el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\
& S &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, donde las flechas oblicuas son los morfismos estructurales. Definimos de manera natural la composición de morfismos de S-esquemas. Así, los S-esquemas juntos con los morfismos de S-esquemas forman un categoría que denotamos por $\mathfrak{Sch}(S)$. Si A es un anillo, entonces por abuso de notación escribiremos $\mathfrak{Sch}(A)$ para denotar a la categoría de esquemas sobre $\operatorname{Spec} A$.

Lema 3.3.1. *Sea Z un espacio topológico y sea $t(Z)$ el conjunto de todos los subconjuntos cerrados e irreducibles en Z. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(a) *Sean* F, F_1, F_2 *conjuntos cerrados en* Z *y* $\{F_i\}_{i\in I}$ *una familia de conjuntos cerrados en* Z*,entonces*

$$t(F) \subseteq t(Z) \quad , \quad t(F_1 \cup F_2) = t(F_1) \cup t(F_2) \quad y \quad t(\bigcap_{i\in I} F_i) = \bigcap_{i\in I} t(F_i)\,.$$

En consecuencia, $t(Z)$ *es un espacio topológico, donde los cerrados de* $t(Z)$ *son los subconjuntos* $t(F)$ *con* F *cerrado en* Z*.*

(b) *Si* $f\colon Z_1 \to Z_2$ *es una aplicación continua, entonces la aplicación inducida por* f*,*

$$t(f)\colon t(Z_1) \to t(Z_2) \quad \textit{dada por} \quad F \mapsto \overline{f(F)}\,,$$

es también continua.

(c) *La aplicación inducida*

$$\alpha\colon Z \to t(Z) \quad \textit{dada por} \quad p \mapsto \overline{\{p\}}$$

es continua. En consecuencia, α *proporciona una correspondencia* $1-1$ *entre los subconjuntos abiertos de* Z *y los abiertos de* $t(Z)$*.*

Demostración. (a). Sea F un conjunto cerrado de Z; puesto que un conjunto cerrado e irreducible en F es también un conjunto cerrado e irreducible en Z, tenemos $t(F) \subseteq t(Z)$.

Si G es un conjunto cerrado e irreducible en $F_1 \cup F_2$ (luego un conjunto cerrado en Z), entonces $G = (G \cap F_1) \cup (G \cap F_2)$ implica que $G \subseteq F_1$ o $G \subseteq F_2$, por tanto $G \in t(F_1) \cap t(F_2)$, esto muestra que $t(F_1 \cap F_2) \subseteq t(F_1) \cap t(F_2)$. Por otro lado, un conjunto cerrado e irreducible de F_1 o F_2 es un conjunto cerrado e irreducible de $F_1 \cap F_2$, luego $t(F_1) \cap t(F_2) \subseteq t(F_1 \cap F_2)$.

Si G es un conjunto cerrado irreducible de $\bigcap_{i\in I} F_i$, entonces G es un conjunto cerrado irreducible en cada F_i, luego $t(\bigcap_{i\in I} F_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} t(F_i)$. Por otro lado, si $G \in \bigcap_{i\in I} t(F_i)$ tenemos que $G \subseteq \bigcap_{i\in I} F_i$ y G es un cerrado e irreducible en $\bigcap_{i\in I} F_i$, por tanto $\bigcap_{i\in I} t(F_i) \subseteq t(\bigcap_{i\in I} F_i)$.

(b). Sea F un conjunto cerrado irreducible de Z_1. Por la Observación 2.3.5, $f(F)$ es irreducible en Z_2, y por la Observación 2.3.4, $\overline{f(F)}$ es un conjunto cerrado e irreducible de Z_2. Por otro, lado un conjunto cerrado de $t(Z_2)$ es de la forma $t(G)$ donde G es cerrado en Z_2, y no hay dificultad en verificar que $t(f)^{-1}(t(G)) = t(f^{-1})(G)$, de donde se sigue que $t(f)^{-1}(t(G))$ es cerrado en Z_1; por tanto $t(f)$ es continua.

(c). Para un conjunto cerrado de Z tenemos

$$\alpha^{-1}(t(F)) = \{p \in Z |\, \overline{\{p\}} \subseteq F\} = \{p \in F |\, p \in F\} = F\,,$$

luego $\alpha^{-1}(t(F))$ es un conjunto cerrado. Por tanto, α es una aplicación continua. Por otro lado, puesto que $\alpha^{-1}(t(F)) = F$, la aplicación $F \mapsto t(F)$ establece una correspondencia biunívoca entre conjuntos cerrados de Z y los conjuntos cerrados de $t(Z)$, luego, existe una correspondencia biunívoca entre conjuntos abiertos de Z y los conjuntos abiertos de $t(Z)$ □

Lema 3.3.2. *Sea* Z *un espacio topológico y sea* U *un abierto de* Z*. Entonces la aplicación*

$$\phi\colon t(U) \to t(Z)\backslash t(Z\backslash U) \quad \textit{dada por} \quad C \mapsto \overline{C}$$

es un homeomorfismo.

Demostración. Veamos que la aplicación ϕ está bien definida, en efecto, si $\overline{C} \in t(Z\backslash U)$, entonces $\overline{C} \subseteq Z\backslash U$, luego $C = \overline{C} \cap U \subseteq Z\backslash U \cap U = \emptyset$ que es absurdo, por tanto $\overline{C} \in t(Z)\backslash t(Z\backslash U)$. Afirmamos que la aplicación $\psi\colon t(Z)\backslash t(Z\backslash U) \to t(U)$ dada por $D \mapsto D \cap U$ es la aplicación inversa de ϕ. En efecto, si $C \in t(U)$ tenemos $\overline{C} \cap U = C$, luego $\psi \circ \phi(C) = \overline{C} \cap U = C$; por otro lado, si $D \in t(Z)\backslash t(Z\backslash U)$ entonces $D \cap U \neq \emptyset$, luego como D es cerrado e irreducible en Z y $D \cap U$ es un abierto en D tenemos $\overline{D \cap U} = D$, esto es $\phi \circ \psi(D) = D$; por tanto ϕ es una biyección. Por otro lado, los abiertos de $t(Z)\backslash t(Z\backslash U)$ y de $t(U)$ son respectivamente de la forma $t(Z)\backslash t(Z\backslash A)$ y $t(U)\backslash t(U\backslash A)$, donde A es un subconjunto abierto de Z contenido en U, y se verifica inmediatamente que $\phi^{-1}(t(Z)\backslash t(Z\backslash A)) = t(U)\backslash t(U\backslash A)$ para todo subconjunto abierto A de Z contenido en U, por tanto se sigue que ϕ es un homeomorfismo. $\square$

Lema 3.3.3. *Sea V es una variedad afín con anillo de coordenadas el k-álgebra $A = k[x_1, \ldots, x_n]/I(V)$, para $p \in V$ sea $\mathfrak{m}_p$ el ideal maximal de A formado por todas las funciones $f \in A$ tal que $f(p) = 0$. Entonces existe un homomorfismo $\phi_p\colon A_{\mathfrak{m}_p} \to k$ tal que $\phi_p(f/g) = f(p)/g(p)$.*

Demostración. Fijemos un punto $p \in V$. El homomorfismo $A/\mathfrak{m}_p \to A_{\mathfrak{m}_p}/\mathfrak{m}_p A_{\mathfrak{m}_p}$ dado por $f + \mathfrak{m}_p \mapsto \frac{f}{1} + \mathfrak{m}_p A_{\mathfrak{m}_p}$ es un isomorfismo. En efecto, para definir el homomorfismo inverso tomamos un elemento $\frac{f}{g} + \mathfrak{m}_p A_{\mathfrak{m}_p} \in A_{\mathfrak{m}_p}/\mathfrak{m}_p A_{\mathfrak{m}_p}$ donde $g \notin \mathfrak{m}_p$, puesto que $\mathfrak{m}_p$ es un ideal maximal tenemos que $\mathfrak{m}_p + \langle g \rangle = \langle 1 \rangle$, luego existe $\lambda \in \mathfrak{m}_p$ y $t \in A$ tal que $\lambda + tg = 1$, y es inmediato verificar que la aplicación $\frac{f}{g} + \mathfrak{m}_p A_{\mathfrak{m}_p} \mapsto ft + \mathfrak{m}_p$ está bien definida y es la aplicación requerida. Por otro lado el homomorfismo $A \to k$ dado por $f \mapsto f(p)$ es sobreyectivo con núcleo $\mathfrak{m}_p$, luego tenemos el isomorfismo $A/\mathfrak{m}_p \xrightarrow{\sim} k$ dado por $f + \mathfrak{m}_p \mapsto f(p)$. Finalmente definimos $\phi_p\colon A_{\mathfrak{m}_p} \to k$ como el homomorfismo compuesto

$$A_{\mathfrak{m}_p} \to A_{\mathfrak{m}_p}/\mathfrak{m}_p A_{\mathfrak{m}_p} \xrightarrow{\sim} A/\mathfrak{m}_p \xrightarrow{\sim} k\,,$$

donde el primer homomorfismo es la proyección canónica. Por otro lado, veamos que $\phi_p(f/g) = f(p)/g(p)$ para $f/g \in A_{\mathfrak{m}_p}$, tenemos

$$f/g \mapsto f/g + \mathfrak{m}_p A_{\mathfrak{m}_p} \mapsto ft + \mathfrak{m}_p \mapsto f(p)t(p)\,,$$

donde $\lambda \in \mathfrak{m}_p$ y $t \in A$ tal que $\lambda + tg = 1$. Luego $t(p)g(p) = 1$, por lo que tenemos $\phi_p(f/g) = f(p)t(p) = f(p)/g(p)$. $\square$

Lema 3.3.4. *Sea V es una variedad proyectiva con anillo de coordenadas el k-álgebra graduado $S = k[x_0, \ldots, x_n]/I(V)$, para $p \in V$ sea $\mathfrak{m}_p$ el ideal primo homogéneo de S formado por todas las funciones $f \in S$ tal que $f(p) = 0$. Entonces existe un homomorfismo $\psi_p\colon S_{(\mathfrak{m}_p)} \to k$ tal que $\psi_p(f/g) = f(p)/g(p)$.*

Demostración. Para $i = 0, \ldots, n$, sea $U_i \in \mathbf{P}^n$ el conjunto abierto afín $x_i \neq 0$, entonces $V \cap U_i$ se identifica con una variedad afín $V_i \subseteq \mathbf{A}^n$ vía el isomorfismo $U_i \xrightarrow{\sim} \mathbf{A}^n$. Luego $p \in V \cap U_i$ para algún i, entonces $\mathcal{O}_{V,p} \cong \mathcal{O}_{V_i,p} \cong A(V_i)_{\mathfrak{m}'_p}$, donde $\mathfrak{m}'_p$ es el ideal maximal de $A(V_i) = k[y_1, \ldots, y_n]/I(V_i)$ correspondiente a p. Por otro lado, tenemos el isomorfismo $S_{(\mathfrak{m}_p)} \xrightarrow{\sim} A(V_i)_{\mathfrak{m}'_p}$ definido por

$$f/g \mapsto f(y_1, .., y_i, 1, y_{i+1}, .., y_n)/g(y_1, .., y_i, 1, y_{i+1}, .., y_n)\,,$$

donde los polinomiales denotan sus módulos residuos $I(V)$ y $I(V_i)$ en cada caso. Definimos $\psi_p\colon S_{(\mathfrak{m}_p)} \to k$ como la composición del isomorfismo $S_{(\mathfrak{m}_p)} \xrightarrow{\sim} A(V_i)_{\mathfrak{m}'_p}$ y el homomorfismo $\phi_p\colon A(V_i)_{\mathfrak{m}'_p} \to k$ del Lema 3.3.3. Sea $p = (a_0, \dots, a_n)$, entonces $\psi_p(f/g) = f(p)/g(p)$, en efecto,

$$\begin{aligned} f/g \mapsto{} & f(\frac{a_0}{a_i}, .., \frac{a_{i-1}}{a_i}, 1, \frac{a_{i+1}}{a_i}, .., \frac{a_n}{a_i})/g(\frac{a_0}{a_i}, .., \frac{a_{i-1}}{a_i}, 1, \frac{a_{i+1}}{a_i}, .., \frac{a_n}{a_i}) \\ &= f(a_0, \dots, a_n)/g(a_0, \dots, a_n) = f(p)/g(p)\,. \end{aligned}$$

□

Proposición 3.3.5. *Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado. Entonces existe un funtor plenamente fiel $t\colon \mathfrak{Var}(k) \to \mathfrak{Sch}(k)$ de la categoría de variedades algebraicas sobre k en la categoría de esquemas sobre k. De manera que para cualquier variedad V, su espacio topológico es homeomorfo al conjunto de puntos cerrados de $sp(t(V))$, y su haz de funciones regulares es obtenido por restringir la estructura de haz de $t(V)$ vía este homeomorfismo.*

Demostración. Dada una variedad algebraica V sobre k, definimos $t(V)$ como en el Lema 3.3.1, pero como V es T_1, la aplicación inducida $\alpha_V\colon V \to t(V)$ está dado por $p \to \{p\}$. Los puntos cerrados de $t(V)$ son de la forma $\{p\}$ con $p \in Y$. Luego, α_V induce un homeomorfismo de V con los puntos cerrados de $t(V)$. Además, existe una biyección entre la topología de V y la topología de $t(V)$

$$\mathcal{T}_V \longleftrightarrow \mathcal{T}_{t(V)}\,, \quad U \mapsto t(V)\backslash t(V\backslash U)\,.$$

Por otra parte, si $f\colon V \to W$ es un morfismo de variedades, del Lema 3.3.1 tenemos la aplicación continua $t(f)\colon t(V) \to t(W)$ dado por $F \mapsto \overline{f(F)}$, y tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha_V"'] & W \arrow[d, "\alpha_W"] \\ t(V) \arrow[r, "t(f)"'] & t(W) \end{tikzcd}$$

A continuación probaremos que $(t(V), \alpha_{V*}\mathcal{O}_V)$ es un esquema sobre k. Sea U un abierto de V y sea $G = t(V)\backslash t(V\backslash U)$, afirmamos que $(G, (\alpha_{V*}\mathcal{O}_V)|_G)$ es isomorfo a $(t(U), \alpha_{U*}\mathcal{O}_U)$ como espacio anillados. En efecto, por el Lema 3.3.2, la aplicación $\phi\colon t(U) \to t(V)\backslash t(V\backslash U)$ dada por $C \mapsto \overline{C}$ es un homeomorfismo, luego si W un subconjunto abierto de V contenido en U, entonces

$$(\alpha_{V*}\mathcal{O}_V)|_G\big(t(V)\backslash t(V\backslash W)\big) = \alpha_{V*}\mathcal{O}_V\big(t(V)\backslash t(V\backslash W)\big) = \mathcal{O}_V(W)\,,$$

también

$$(\phi \circ \alpha_U)_*\mathcal{O}_U\big(t(V)\backslash t(V\backslash W)\big) = \alpha_{U*}\mathcal{O}_U\big(t(U)\backslash t(U\backslash W)\big) = \mathcal{O}_U(W)\,,$$

y como $\mathcal{O}_U(W) \cong \mathcal{O}_V(W)$, se sigue que $\phi^\sharp\colon (\alpha_{V*}\mathcal{O}_V)|_G \to (\phi \circ \alpha_U)_*\mathcal{O}_U$ es un isomorfismo; de esta manera

$$(G, (\alpha_{V*}\mathcal{O}_V)|_G) \cong (t(U), \alpha_{U*}\mathcal{O}_U)\,, \quad \text{donde} \quad G = t(V)\backslash t(V\backslash U)\,. \tag{3.3.3}$$

Por otro lado, si $\{U_i\}$ es un cubrimiento abierto de V, tenemos

$$t(V) = \bigcup_i t(V)\backslash t(V\backslash U_i)\,. \tag{3.3.4}$$

Ahora bien, puesto que V es cubierto por subvariedades abiertos afines, por los resultados (3.3.3) y (3.3.4), será suficiente probar que $t(V)$ es esquema sobre k para el caso cuando V es afín. En efecto, en este caso probaremos que $t(V)$ es un esquema afín sobre k. Supongamos que V es una variedad afín con anillo de coordenadas un k-álgebra A. Sea $X = \operatorname{Spec} A$.El espacio anillado $(V, \mathcal{O}_V)$ es un espacio localmente anillado (ver Hartshorne [6], cap. I, Teor. 3.2). Definiremos un morfismo de espacios localmente anillados

$$(\beta, \beta^\sharp)\colon (V, \mathcal{O}_V) \to (X, \mathcal{O}_X)\,.$$

Definimos $\beta\colon V \to \operatorname{Spec} A$ dado por $p \mapsto \mathfrak{m}_p$ donde $\mathfrak{m}_p$ es el ideal maximal de A, formado por todas los funciones $f \in A$ tal que $f(p) = 0$. Por Hartshorne [6] cap I Teor. 3.2, β es una biyección de V sobre los puntos cerrados de Spec A, además esta aplicación es un homeomorfismo sobre su imagen, puesto que, $\beta(Z_V(\mathfrak{a})) = V(\mathfrak{a}) \cap \beta(V)$ para todo ideal $\mathfrak{a}$ de A. Ahora para cualquier abierto U de X, definimos $\beta^\sharp(U)\colon \mathcal{O}_X(U) \to \beta_*\mathcal{O}_V(U) = \mathcal{O}_V(\beta^{-1}(U))$, como sigue, damos una sección $s \in \mathcal{O}_X(U)$ y damos un punto $p \in \beta^{-1}(U)$, entonces definimos

$$\beta^\sharp(U)(s)(p) := \phi_p(s(\mathfrak{m}_p))\,,$$

donde $\phi_p\colon A_{\mathfrak{m}_p} \to k$ es el homomorfismo dado en el Lema 3.3.3. Veamos que $\beta^\sharp(U)(s)$ es una aplicación regular. Sea $p \in \beta^{-1}(U)$, por definición de s, existe un entorno abierto $W \subseteq U$ de $\beta(p)$ y existen $a, b \in A$ tal que $s(\mathfrak{q}) = \frac{a}{b} \in A_{\mathfrak{q}}$ para todo $\mathfrak{q} \in W$, luego, $\beta^{-1}(W)$ es un entorno abierto de p, además si $q \in \beta^{-1}(W)$, tenemos

$$\beta(U)(s)(q) = \phi_q(s(\mathfrak{m}_q)) = \phi_q(s(\beta(q))) = \phi_q(\frac{a}{b}) = \frac{a(q)}{b(q)}\,,$$

esto muestra que $\beta(U)(s)$ es regular. Por otro lado, es inmediato verificar que $\beta^\sharp(U)$ es un homomorfismo de anillos y $\beta^\sharp$ es un morfismo de haces. A continuación veamos que $\beta^\sharp$ es un isomorfismo, para ello basta que $\beta^\sharp(D(h))$ es un isomorfismo para todo $h \in A$. En efecto, es inmediato verificar que $\beta^{-1}(D(h)) = D_V(h) \subseteq V$, de manera que tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A_h \arrow[r, Rightarrow, "\mathrm{id}"] \arrow[d, Rightarrow] & A_h \arrow[d, Rightarrow] \\
\mathcal{O}_X(D(h)) \arrow[r, "\beta^\sharp(D(h))"'] & \mathcal{O}_V(D_V(h))
\end{tikzcd}$$

Por tanto $\beta^\sharp(D(h))$ es un isomorfismo. Vemos ahora que $t(V) \cong \operatorname{Spec} A$ como esquemas sobre k. La aplicación $\gamma\colon \operatorname{Spec} A \to t(V)$ por $\mathfrak{p} \mapsto Z(\mathfrak{p})$ es un homeomorfismo de tal forma que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & & t(V) \\ & \mathrm{Spec}\ A \arrow[ur, "\gamma"'] & \end{tikzcd}$$

Por otro lado , tenemos

$$\alpha_*\mathcal{O}_V(U) = \mathcal{O}_V(\alpha^{-1}(U)) = \mathcal{O}_V(\beta^{-1}(\gamma^{-1}(U)))\,,$$

$$\gamma_*\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X(\gamma^{-1}(U))\,.$$

Esto nos permite definir $\gamma^\sharp\colon \alpha_*\mathcal{O}_V \to \gamma_*\mathcal{O}_X$ como

$$\gamma^\sharp(U) := \beta^\sharp(\gamma^{-1}(U))^{-1}\,,$$

de manera que $\gamma^\sharp$ es también un isomorfismo. Finalmente, el homomorfismo $k \to A$ induce el morfismo Spec $A \to$ Spec k y un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}\ A \arrow[rr, Rightarrow, "\gamma"] \arrow[dr] & & t(Y) \arrow[dl] \\ & \mathrm{Spec}\ k & \end{tikzcd}$$

□

Proposición 3.3.6. *Sea V una variedad proyectiva sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k, con anillo de coordenadas S. Entonces existe un isomorfismo $t(V) \cong \mathrm{Proj}\ S$ de esquemas sobre k.*

Demostración. Supongamos que V es una variedad proyectiva con anillo de coordenadas un k-álgebra graduado S y sea $X = \mathrm{Proj}\ S$. El espacio anillado $(V, \mathcal{O}_V)$ es un espacio localmente anillado (ver Hartshorne [6], cap. I, Teor. 3.4). Definiremos un morfismo de espacios localmente anillados

$$(\beta, \beta^\sharp)\colon (V, \mathcal{O}_V) \to (X, \mathcal{O}_X)\,.$$

Definimos $\beta\colon V \to \mathrm{Proj}\ S$ por $p \mapsto \mathfrak{m}_p$ donde $\mathfrak{m}_p$ es un ideal primo homogéneo S, formado por todas los funciones homogéneas $f \in S$ tal que $f(p) = 0$. Esta aplicación es un homeomorfismo sobre su imagen, ya que β es inyectiva y $\beta(Z_V(\mathfrak{a})) = V_+(\mathfrak{a}) \cap \beta(V)$ para todo ideal homogéneo $\mathfrak{a}$ de S. Ahora para cualquier abierto U de X, definimos $\beta^\sharp(U)\colon \mathcal{O}_X(U) \to \beta_*\mathcal{O}_V(U) = \mathcal{O}_V(\beta^{-1}(U))$, como sigue, damos una sección $s \in \mathcal{O}_X(U)$ y damos un punto $p \in \beta^{-1}(U)$, entonces definimos

$$\beta^\sharp(U)(s)(p) := \psi_p(s(\mathfrak{m}_p))\,,$$

donde $\psi_p\colon S_{(\mathfrak{m}_p)} \to k$ es el homomorfismo dado en el Lema 3.3.4. Veamos que $\beta^\sharp(U)(s)$ es una aplicación regular, sea $p \in \beta^{-1}(U)$, entonces por definición de s, existe un entorno abierto $W \subseteq U$ de $\beta(p)$ y existen elementos homogéneos $a, b \in S$ del mismo grado tal que $s(\mathfrak{q}) = \frac{a}{b} \in S_{(\mathfrak{q})}$ para todo $\mathfrak{q} \in W$. Luego, $\beta^{-1}(W)$ es un entorno abierto de p, además si $q \in \beta^{-1}(W)$, tenemos

$$\beta(U)(s)(q) = \psi_q(s(\mathfrak{m}_q)) = \psi_q(s(\beta(q))) = \psi_q(\frac{a}{b}) = \frac{a(q)}{b(q)}\,,$$

esto muestra que $\beta(U)(s)$ es regular. Por otro lado, es inmediato verificar que $\beta^\sharp(U)$ es un homomorfismo de anillos y $\beta^\sharp$ es un morfismo de haces. A continuación veamos que $\beta^\sharp$ es un isomorfismo, para ello basta que $\beta^\sharp(D_+(h))$ es un isomorfismo para todo elemento homogéneo $h \in S$. En efecto, es inmediato verificar que $\beta^{-1}(D_+(h)) = D_V(h) \subseteq V$, de manera que tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
S_{(h)} \arrow[r, Rightarrow, "\mathrm{id}"] \arrow[d, Rightarrow] & S_{(h)} \arrow[d, Rightarrow] \\
\mathcal{O}_X(D_+(h)) \arrow[r, "\beta^\sharp(D_+(h))"'] & \mathcal{O}_V(D_V(h))
\end{tikzcd}$$

Por tanto $\beta^\sharp(D_+(h))$ es un isomorfismo. Vemos ahora que $t(V) \cong \mathrm{Proj}\ S$ como esquemas sobre k. Definimos la aplicación $\gamma\colon \mathrm{Proj}\ S \to t(V)$ por $\mathfrak{p} \mapsto Z(\mathfrak{p})$, claramente ésta aplicación es un homeomorfismo y tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & & t(V) \\
& \mathrm{Proj}\ S \arrow[ur, "\gamma"'] &
\end{tikzcd}$$

Por otro lado,

$$\alpha_*\mathcal{O}_V(U) = \mathcal{O}_V(\alpha^{-1}(U)) = \mathcal{O}_V(\beta^{-1}(\gamma^{-1}(U)))\,,$$
$$\gamma_*\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X(\gamma^{-1}(U))\,,$$

esto nos permite definir $\gamma^\sharp\colon \alpha_*\mathcal{O}_V \to \gamma_*\mathcal{O}_X$ como

$$\gamma^\sharp(U) := \beta^\sharp(\gamma^{-1}(U))^{-1}\,,$$

de manera que $\gamma^\sharp$ es también un isomorfismo. Finalmente, el homomorfismo $k \to S$ induce el morfismo $\mathrm{Proj}\ S \to \mathrm{Spec}\ k$ y un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Proj}\ S \arrow[rr, Rightarrow, "\gamma"] \arrow[dr] & & t(Y) \arrow[dl] \\
& \mathrm{Spec}\ k &
\end{tikzcd}$$

□

Corolario 3.3.7. *Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado. Para $n \geq 0$ tenemos los siguientes isomorfismos sobre k*

$$t(\mathbf{A}^n) \cong \mathbf{A}^n_k \quad , \quad t(\mathbf{P}^n) \cong \mathbf{P}^n_k$$

Demostración. Son inmediatos de las proposiciones anteriores.

3.4 Subesquemas y Propiedades de Esquemas

Definición 3.4.1. Sea X un esquema y sea U un subconjunto abierto de X. Un morfismo de esquemas $(j, j^\sharp)\colon (U, \mathcal{O}_U) \to (X, \mathcal{O}_X)$ es llamado *morfismo inclusión* si j es la aplicación inclusión y el morfismo $j^\sharp$ proviene de lo siguiente: como U es abierto de X, $j^{-1}\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X|_U = \mathcal{O}_U$, luego de la propiedad de adjunción para j^{-1} (Proposición 3.1.24), tenemos el morfismo $j^\sharp\colon \mathcal{O}_X \to j_* j^{-1}\mathcal{O}_X = j_*\mathcal{O}_U$. Denotaremos al morfismo inclusión simplemente por j.

Definición 3.4.2. Un *subesquema abierto* de un esquema X, es un esquema U, cuyo espacio topológico es un subconjunto abierto de X, y cuya estructura de haz $\mathcal{O}_U$ es isomorfo a la restricción $\mathcal{O}_X\big|_U$ de la estructura de haz de X. Una *inmersión abierta* es un morfismo $f\colon Y \to X$ que induce un isomorfismo de X sobre un esquema con un subesquema abierto de Y, es decir f se factoriza en $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{j} X$ donde g es un isomorfismo, Z es un subesquema abierto de X y j es el morfismo inclusión. Un *subesquema cerrado* de un esquema X, es un esquema Y junto con un morfismo de esquemas $(i, i^\sharp)\colon (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$, tal que $sp(Y)$ es un subconjunto cerrado de $sp(X)$, i es la inclusión y el morfismo de haces $i^\sharp\colon \mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_Y$ es sobreyectivo. Diremos que $(i, i^\sharp)$ es el *morfismo inclusión* asociado al subesquema cerrado Y, lo denotaremos simplemente por i. Una *inmersión cerrada* es un morfismo $f\colon Y \to X$ que induce un isomorfismo de Y sobre un esquema con un subesquema cerrado de X, es decir f se factoriza en $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{j} X$ donde g es un isomorfismo, Z es un subesquema cerrado de X y j es el morfismo inclusión asociado a Z.

Observación 3.4.1. En la definición anterior de subesquema cerrado, observemos desde que Y es un subconjunto cerrado de X, tenemos

$$(i_*(\mathcal{O}_Y))_p = \begin{cases} \mathcal{O}_{Y,p}\,, & \text{si} \quad \mathfrak{p} \in Y\,, \\ 0\,, & \text{si} \quad \mathfrak{p} \in X \backslash Y\,. \end{cases}$$

Por tanto, decir que $i^\sharp$ es sobreyectiva es equivalente a que el homomorfismo inducido $i^\sharp_p\colon \mathcal{O}_{X,p} \to \mathcal{O}_{Y,p}$ es sobreyectivo para todo $p \in Y$. Luego, un morfismo $f\colon X \to Y$ es una inmersión cerrada, si solamente si que f es un homeomorfismo de X sobre un subconjunto cerrado de Y, y el homomorfismo inducido $f^\sharp_p\colon \mathcal{O}_{Y,f(p)} \to \mathcal{O}_{X,p}$ es sobreyectivo para todo $p \in X$.

Ejemplo 3.4.1. Sea un anillo A y sean $\mathfrak{a}$ un ideal de A, $X = \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a}$, $Y = \operatorname{Spec} A$, y consideremos el homomorfismo de anillos $\varphi\colon A \to A/\mathfrak{a}$. Entonces el morfismo de esquemas $f\colon X \to Y$ inducido por φ, es una inmersión cerrada. En efecto, f es un homeomorfismo de X sobre el subconjunto cerrado $V(\mathfrak{a})$ de Y. Por otro lado, si $\mathfrak{p} \in X$ y $\mathfrak{q} = f(\mathfrak{p})$, entonces φ induce el homomorfismo local $\varphi_{\mathfrak{p}} \colon A_q \to (A/\mathfrak{a})_{\mathfrak{p}}$ dado por $\frac{a}{\alpha} \mapsto \frac{\varphi(a)}{\varphi(\alpha)}$, que es sobreyectiva ya que φ es sobreyectiva, y el morfismo $f^\sharp \colon \mathcal{O}_Y \to f_*(\mathcal{O}_X)$ está definido como $f^\sharp(U)(s)(\mathfrak{p}) = \varphi_{\mathfrak{p}}(s(f(\mathfrak{p})))$ para todo abierto U de X, $s \in \mathcal{O}_Y(U)$ y $\mathfrak{p} \in X$. Luego, para $\mathfrak{p} \in X$ y $\mathfrak{q} = f(\mathfrak{p})$, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{Y,\mathfrak{q}} \arrow[r, "f^\sharp_{\mathfrak{p}}"] \arrow[d, Rightarrow] & \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \arrow[d, Rightarrow] \\
A_{\mathfrak{q}} \arrow[r, "\varphi_{\mathfrak{p}}"'] & (A/\mathfrak{a})_{\mathfrak{p}}
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, donde los isomorfismos verticales son los isomorfismos naturales. De esta manera $f^\sharp_{\mathfrak{p}}$ es sobreyectiva para todo $\mathfrak{p} \in X$, por la observación anterior se sigue que f es una inmersión cerrada.

Definición 3.4.3. Un esquema X es llamado *localmente noetheriano* si es cubierto por subconjuntos abiertos afines Spec A_i, donde cada A_i es un anillo noetheriano. Diremos que X es *noetheriano* si es localmente noetheriano y casi compacto.

Teorema 3.4.2. *Un esquema X es localmente noetheriano si y sólo si para cada subconjunto abierto afín $U =$ Spec A, el anillo A es noetheriano. En particular, un esquema afín $X =$ Spec A es un esquema noetheriano si, y sólo si, el anillo A es un anillo noetheriano.*

Demostración. Ver Hartshorne [6], Proposición 3.2, pag. 83.

□

Definición 3.4.4. Un morfismo $f \colon X \to Y$ de esquemas es de *tipo finito* si para todo abierto afín $V =$ Spec B de Y, $f^{-1}(V)$ puede ser cubierto por un numero finito de abiertos afines $U_i =$ Spec A_i, donde cada A_i es un B-álgebra de tipo finito.

Un morfismo $f \colon X \to Y$ de esquemas es *finito* si para todo abierto afín $V =$ Spec B de Y, $f^{-1}(V)$ es afín, igual a Spec A, donde cada A es un B-módulo de tipo finito.

Definición 3.4.5. Un morfismo $f \colon X \to Y$ de esquemas es *casi compacto* si para cada subconjunto abierto afín $V \subseteq Y$, $f^{-1}(V)$ es casi compacto.

Definición 3.4.6. Sea S un esquema y sean X, Y esquemas sobre S. Definimos el *producto fibrado* de X e Y sobre S, denotado por $X \times_S Y$, como un esquema, junto con morfismos $p_1 \colon X \times_S Y \to X$ y $p_2 \colon X \times_S Y \to Y$ los cuales conmutan con los morfismos $X \to S$ y $Y \to S$, tal que dado cualquier esquema Z sobre S, y dado dos morfismos $f \colon Z \to X$ y $g \colon Z \to Y$ los cuales hacen un diagrama conmutativo con los morfismos $X \to S$ y $Y \to S$, entonces existe un único morfismo $\theta \colon Z \to X \times_S Y$ tal que $f = p_1 \circ \theta$

y $g = p_2 \circ \theta$; gráficamente se escribe,

$$
\begin{tikzcd}
Z \arrow[rr, dashed] \arrow[dr] \arrow[drrr] & & X \times_S Y \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
& X \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\
& & S &
\end{tikzcd}
$$

Los morfismos p_1 y p_2 son llamados *morfismos proyección* del producto fibrado sobre sus factores. Si X e Y son dos esquemas, entonces el *producto fibrado* de X e Y, denotado por $X \times Y$, será el esquema $X \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}} Y$.

Teorema 3.4.3. *Para cualquier par de esquemas X e Y sobre S, existe el producto fibrado $X \times_S Y$ y es único salvo isomorfismo.*

Demostración. Ver [6] o [11]. $\square$

Definición 3.4.7. Sea $f \colon X \to Y$ un morfismo entre esquemas. El *morfismo diagonal* es el único morfismo $\triangle_X \colon X \to X \times_Y X$ cuya composición con las proyecciones $\pi_1, \pi_2 \colon X \times_Y X \to X$ es la aplicación identidad $id_X \colon X \to X$ como muestra el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, dashed, "\triangle"] \arrow[dr] \arrow[drrr] & & X \times_Y X \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
& X \arrow[dr] & & X \arrow[dl] \\
& & Y &
\end{tikzcd}
$$

Decimos que el morfismo f es *separado* si el morfismo diagonal $\triangle_X$ es una inmersión cerrada, en este caso diremos que X es *separado* sobre Y. Un esquema X es *separado* si es separado sobre $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$.

Ejemplo 3.4.4. Si V es una variedad sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k, entonces el esquema asociado $t(V)$ es separado sobre k.

En la siguiente definición generalizamos el concepto del n-espacio proyectivo $\mathbf{P}^n_A$ sobre un anillo A.

Definición 3.4.8. Sea Y un esquema. Definimos el *n-espacio proyectivo* sobre Y, denotado por $\mathbf{P}^n_Y$, como el producto fibrado $\mathbf{P}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}} Y$. Un morfismo de esquemas $f \colon X \to Y$ es *proyectivo* si se factoriza en una inmersión cerrada $i \colon X \to \mathbf{P}^n_Y$ para algún entero $n \geq 1$, seguido por la proyección $\mathbf{P}^n_Y \to Y$. Un morfismo $f\colon X \to Y$ es *casi proyectivo* si se factoriza en una inmersión abierta $j\colon X \to X'$ seguido por un morfismo proyectivo $g\colon X' \to Y$. En lo anterior, cuando $Y = \operatorname{Spec} A$, diremos que X es un *esquema proyectivo* (resp. *casi proyectivo*) sobre A.

Ejemplo 3.4.5. Sea A un anillo y sea S un anillo graduado con $S_0 = A$ finitamente generado por S_1 como A-álgebra . Entonces el morfismo natural $\operatorname{Proj} S \to \operatorname{Spec} A$ es un morfismo proyectivo (ver ítem (b) de la Proposición 4.4.13).

3.5 Subesquemas Cerrados

Proposición 3.5.1. *Sea $\varphi\colon S \to T$ un homomorfismo graduado de anillos graduados. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(a) *El conjunto $U = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} T : \varphi(S_+) \nsubseteq \mathfrak{p}\}$ es un subconjunto abierto de $\operatorname{Proj} T$; además φ induce un morfismo de esquemas $f\colon U \to \operatorname{Proj} S$.*

(b) *Si $\varphi_d\colon S_d \to T_d$ es un isomorfismo para todo $d \geq d_0$, donde d_0 es un entero no negativo. Entonces $U = \operatorname{Proj} T$ y el morfismo $f\colon \operatorname{Proj} T \to \operatorname{Proj} S$ es un isomorfismo.*

(c) *Si φ es sobreyectiva, entonces $U = \operatorname{Proj} T$ y el morfismo $f\colon \operatorname{Proj} T \to \operatorname{Proj} S$ es una inmersión cerrada.*

Demostración. (a). Veamos que U es abierto en $\operatorname{Proj} T$. Sea $\mathfrak{p} \in U$ arbitrario, entonces $\varphi(S_+) \nsubseteq \mathfrak{p}$, esto implica que existe un elemento homogéneo $s \in S_+$ tal que $\varphi(s) \notin \mathfrak{p}$, así $\mathfrak{p} \in D_+(\varphi(s))$. Afirmamos que el conjunto $D_+(\varphi(s))$ es un entorno de $\mathfrak{p}$ contenido en U; en efecto, dado $\mathfrak{q} \in D_+(\varphi(s))$ tenemos que $\varphi(s) \notin \mathfrak{q}$ luego $\varphi(S_+) \nsubseteq \mathfrak{q}$ y por definición $\mathfrak{q} \in U$. Veamos ahora que φ induce un morfismo de esquemas de U en $\operatorname{Proj} S$. Definamos $f\colon U \to \operatorname{Proj} T$ dado por $\mathfrak{p} \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$. La aplicación f está bien definida, pues, si $\mathfrak{p} \in U$ tenemos que $\varphi(S_+) \nsubseteq \mathfrak{p}$, esto implica que $S_+ \nsubseteq \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$, por otro lado el ideal primo $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ es homogéneo desde que φ es homomorfismo graduado y por tanto $f(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \in \operatorname{Proj} S$. La continuidad de f se sigue desde que se tiene la igualdad $f^{-1}(V(\mathfrak{a})) = V(\langle\varphi(\mathfrak{a})\rangle) \cap U$ para cada ideal homogéneo $\mathfrak{a}$ de S. A continuación definiremos un morfismo $f^\sharp$ de $\mathcal{O}_{\operatorname{Proj} S}$ en $f_*(\mathcal{O}_{\operatorname{Proj} T}\ |_U)$. Consideremos para cada $\mathfrak{p} \in U$, el homomorfismo local de anillos $\varphi_\mathfrak{p}\colon S_{(\varphi^{-1}(\mathfrak{p}))}{\to}T_{(\mathfrak{p})}$ dado por $\frac{a}{\lambda} \mapsto \frac{\varphi(a)}{\varphi(\lambda)}$. Definimos $f^\sharp(W)\colon \mathcal{O}_{\operatorname{Proj} S}(W) \to \mathcal{O}_{\operatorname{Proj} T}(f^{-1}(W))$ dado por $f^\sharp(W)(s)(\mathfrak{p}) = \varphi_\mathfrak{p}(s \circ f(\mathfrak{p}))$ para todo $s \in \mathcal{O}_{\operatorname{Proj} S}(W)$, $\mathfrak{p} \in f^{-1}(W)$. Para la inclusión $Z \subseteq W$ de abiertos de Proj S, el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{\operatorname{Proj} S}(W) \arrow[r, "f^\sharp(W)"] \arrow[d] & \mathcal{O}_{\operatorname{Proj} T}(f^{-1}(W)) \arrow[d] \\
\mathcal{O}_{\operatorname{Proj} S}(Z) \arrow[r, "f^\sharp(Z)"] & \mathcal{O}_{\operatorname{Proj} T}(f^{-1}(Z))
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, donde las flechas verticales son las restricciones naturales. En efecto, dado $s \in \mathcal{O}_{\mathrm{Proj}\ S}(W)$ y $p \in f^{-1}(Z))$ tenemos

$$\begin{aligned} f^\sharp(W)(s)\big|_{f^{-1}(Z)}(\mathfrak{p}) = f^\sharp(W)(s)(\mathfrak{p}) &= \varphi_{\mathfrak{p}}(s \circ f(\mathfrak{p})) = \varphi_{\mathfrak{p}}(s\big|_Z(f(\mathfrak{p}))) \\ &= \varphi_{\mathfrak{p}}(s\big|_Z \circ f(p)) = f^\sharp(Z)(s\big|_Z)(p). \end{aligned}$$

Por tanto tenemos el morfismo de haces $f^\sharp$; además, para cada $\mathfrak{p} \in U$ el homomorfismo $f^\sharp_{\mathfrak{p}}$ es local desde que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{\mathrm{Proj}\ S, f(\mathfrak{p})} \arrow[r, "f^\sharp_{\mathfrak{p}}"] \arrow[d, Rightarrow] & \mathcal{O}_{\mathrm{Proj}\, T, \mathfrak{p}} \arrow[d, Rightarrow] \\ S_{(f(\mathfrak{p}))} \arrow[r, "\varphi_{\mathfrak{p}}"] & T_{(\mathfrak{p})} \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

(b). Veamos que $U = \mathrm{Proj}\, T$. Tomemos $\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}\, T$, puesto que $T_+ \subsetneq \mathfrak{p}$ podemos conseguir un elemento homogéneo $t \in T_+$ tal que $t \notin \mathfrak{p}$ y como $\mathfrak{p}$ es ideal primo $t^k \notin \mathfrak{p}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Sea $r = \partial(t)$ y tomemos k suficientemente grande de modo que $kr \geq d_0$, entonces $\partial(t^k) = kr \geq d_0$. Por hipótesis φ_{kr} es isomorfismo, luego existe $s \in S_{kr} \subseteq S_+$ tal que $\varphi(s) = t^k$, en particular $t^k \notin \mathfrak{p}$, por tanto $\varphi(S_+) \subsetneq p$, o sea $\mathfrak{p} \in U$.

A continuación veamos que el morfismo $f\colon \mathrm{Proj}\, T \to \mathrm{Proj}\ S$ definido en (a) es un isomorfismo. Sea $\{t_i\}_{i\in I}$ la familia de todos los elementos homogéneos de T_+ con $\partial(t_i) \geq d_0$; afirmamos que $\{D_+(t_i)\}_{i\in I}$ es un cubrimiento de $\mathrm{Proj}\, T$; en efecto, dado $\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}\, T$, como $T_+ \subsetneq p$ podemos conseguir un elemento homogéneo $t \in T_+$ tal que $t \notin \mathfrak{p}$, luego $t^{d_0} \notin \mathfrak{p}$ y $\partial(t^{d_0}) \geq d_0$, entonces por definición $t^{d_0} = t_i$ para algún $i \in I$, así tenemos que $t_i \notin \mathfrak{p}$, es decir $\mathfrak{p} \in D_+(t_i)$. Luego, como para cada $i \in I$, $\partial(t_i) \geq d_0$ y φ_d es isomorfismo para $d \geq d_0$, entonces existe $s_i \in S_+$ tal que $\varphi(s_i) = t_i$ para cada $i \in I$. Consideremos el homomorfismo de anillos $\varphi_i\colon S_{(s_i)} \to T_{(t_i)}$ dado por $\frac{a}{s_i^n} \mapsto \frac{\varphi(a)}{t_i^n}$. El homomorfismo φ_i induce un morfismo $\widetilde{\varphi_i}$ de Spec $T_{(t_i)}$ sobre Spec $S_{(s_i)}$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} D_+(t_i) \arrow[r, "f"] \arrow[d, Rightarrow] & D_+(s_i) \arrow[d, Rightarrow] \\ \mathrm{Spec}\, T_{(t_i)} \arrow[r, "\widetilde{\varphi_i}"] & \mathrm{Spec}\, S_{(s_i)} \end{tikzcd}$$

es conmutativo, donde las flechas verticales son homeomorfismos y f_i es la restricción de f en $D_+(t_i)$. Por otro lado, desde que $\partial(s_i) \geq d_0$ y φ_d es isomorfismo para todo $d \geq d_0$, tenemos que φ_i es isomorfismo, luego $\widetilde{\varphi_i}$ es isomorfismo como esquemas afines, y el diagrama anterior implica que $f_i = f\big|_{D_+(t_i)}\colon D_+(t_i) \to D_+(s_i)$ es un isomorfismo como esquemas afines. Afirmamos que la aplicación continua $f\colon \mathrm{Proj}\, T \to \mathrm{Proj}\ S$ es un homeomorfismo. En efecto, veamos que f es inyectiva, sean $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \mathrm{Proj}\, T$ tal que

$\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$, luego tenemos $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \cap S_d = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \cap S_d$ para todo $d \geq 0$, y por el Lema 2.2.5 tenemos que $\varphi_d^{-1}(\mathfrak{p}_d) = \varphi_d^{-1}(\mathfrak{q}_d)$. Como φ_d^{-1} es isomorfismo cuando $d \geq d_0$ entonces se tiene que $\mathfrak{p}_d = \mathfrak{q}_d$ para todo $d \geq d_0$. Afirmamos que $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$, si no fuera así, tendríamos que $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q}$ o $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$. Supongamos que $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q}$, entonces podemos encontrar elementos homogéneos $s \in \mathfrak{p}$ y $t \in T_+$ tal que $s \notin \mathfrak{q}$ y $t \notin \mathfrak{q}$, ya que también $T_+ \subsetneq \mathfrak{q}$. Sea $d = \partial(st^{d_0}) \geq d_0$, entonces $s.t^{d_0} \in \mathfrak{p}_d = \mathfrak{q}_d$, por otra parte $s.t^{d_0} \notin \mathfrak{q}$ ya que $\mathfrak{q}$ es primo, luego $s.t^{d_0} \notin \mathfrak{q}_d$, que es una contradicción, por tanto f es inyectiva. Para probar que f es sobreyectiva, basta probar que la familia $\{D_+(s_i)\}_{i\in I}$ cubre a Proj S, ya que $f_i = f\big|_{D_+(t_i)}$ y las aplicaciones f_i son sobreyectivas para todo $i \in I$. Dado $\mathfrak{q} \in$ Proj S, por definición $S_+ \subsetneq \mathfrak{q}$, luego existe un elemento homogéneo $s \in S_+$ tal que $s \notin \mathfrak{q}$, y como φ es homomorfismo graduado y s homogéneo con $\partial(s) \geq 1$, tenemos que $\varphi(s^{d_0})$ es un elemento homogenéo de S_+ con $\partial(\varphi(s^{d_0})) \geq d_0$, por tanto $\varphi(s^{d_0}) = t_i$ y $s^{d_0} = s_i$ para algún $i \in I$, luego como $\mathfrak{q}$ es primo y $s \notin \mathfrak{q}$ se tiene que $s_i \notin \mathfrak{q}$ y así $\mathfrak{q} \in D_+(s_i)$. Finalmente la aplicación f es abierta, puesto que para cada subconjunto abierto V de $\operatorname{Proj} T$ se tiene que $f(V) = f(\bigcup_{i\in I} V \cap D_+(s_i)) = \bigcup_{i\in I} f_i(V \cap D_+(s_i))$ es abierta en Proj S, ya que cada $f_i(V \cap D_+(s_i))$ es abierta en $D_+(s_i)$ y este subconjunto es abierto en Proj S. Para concluir que $f\colon \operatorname{Proj} T \to \operatorname{Proj} S$ es un isomorfismo, veamos que $f_{\mathfrak{p}}^{\sharp}\colon \mathcal{O}_{\operatorname{Proj} S, f(\mathfrak{p})} \to \mathcal{O}_{\operatorname{Proj} T,\mathfrak{p}}$ es isomorfismo para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} T$; en efecto, dado $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} T$, puesto que la familia $\{D_+(t_i))\}_{i\in I}$ cubre a $\operatorname{Proj} T$, tenemos que $\mathfrak{p} \in D_+(t_j)$ para algún $j \in I$, y como $f_j = f\big|_{D_+(t_j)}\colon D_+(t_j) \to D_+(s_j)$ es isomorfismo, tenemos que $f_{j,\mathfrak{p}}^{\sharp}\colon \mathcal{O}_{D_+(s_j),f(\mathfrak{p})} \to \mathcal{O}_{D_+(t_j),\mathfrak{p}}$ es isomorfismo. Por tanto $f_{\mathfrak{p}}^{\sharp}$ es un isomorfismo desde que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{\operatorname{Proj}(S),f(\mathfrak{p})} \arrow[r, "f_{\mathfrak{p}}^{\sharp}"] \arrow[d] & \mathcal{O}_{\operatorname{Proj}(T),\mathfrak{p}} \arrow[d] \\
\mathcal{O}_{D_+(s_j),f(\mathfrak{p})} \arrow[r, "f_{j,\mathfrak{p}}^{\sharp}"] & \mathcal{O}_{D_+(t_j),\mathfrak{p}}
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, donde las flechas verticales son los isomorfismos naturales.

(c). Tenemos inmediatamente que $\varphi(S_+) = T_+$ desde que φ es homomorfismo graduado sobreyectivo, y así $U = \operatorname{Proj} T$. Veamos ahora que $f\colon \operatorname{Proj} T \to \operatorname{Proj} S$ es un homeomorfismo de $\operatorname{Proj} T$ sobre $V(\operatorname{Nuc}(\varphi)) \subseteq \operatorname{Proj} S$. En efecto, f es inyectiva desde que φ es sobreyectiva. Por otra parte, tomando $U = \operatorname{Proj} T$ en la demostración de la continuidad de f del item (a), tendremos que $f^{-1}(V(\mathfrak{a})) = V(\langle\varphi(\mathfrak{a})\rangle)$ para todo ideal homogéneo $\mathfrak{a}$ de S, entonces la sobreyectividad de φ implica que $f^{-1}(V(\varphi^{-1}(\mathfrak{b}))) = V(\mathfrak{b})$ para todo ideal homogéneo $\mathfrak{b}$ de T, luego $f(V(\mathfrak{b})) = V(\varphi^{-1}(\mathfrak{b}))$ puesto que f es inyectiva, además para $\mathfrak{b} = 0$ tenemos $f(\operatorname{Proj} T)) = V(\operatorname{Nuc}(\varphi))$. Finalmente veamos que $f^{\sharp}\colon \mathcal{O}_{\operatorname{Proj} S} \to f_*\mathcal{O}_{\operatorname{Proj} T}$ es sobreyectiva, para ello basta que el homomorfismo inducido $f_{\mathfrak{p}}^{\sharp}\colon \mathcal{O}_{\operatorname{Proj} S,f(\mathfrak{p})} \to \mathcal{O}_{\operatorname{Proj} T,\mathfrak{p}}$ sea sobreyectivo para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} T$, pero esto se sigue inmediatamente desde que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}\,S,f(p)} \arrow[r, "f_p^\sharp"] \arrow[d, Rightarrow] & \mathcal{O}_{\mathrm{Proj}\,T,p} \arrow[d, Rightarrow] \\
S_{(f(\mathfrak{p}))} \arrow[r, "\varphi_{\mathfrak{p}}"] & T_{(\mathfrak{p})}
\end{tikzcd}
$$

es conmutativo y $\varphi_{\mathfrak{p}}$ es sobreyectivo, donde las flechas verticales son los isomorfismos naturales. □

Corolario 3.5.2. *Sea* $S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$ *un anillo graduado e* I *un ideal homogéneo de* S*, sea también* $I' = \bigoplus_{d \geq d_0} I_d$*, donde* d_0 *un entero fijo y no negativo, entonces los ideales* I *e* I' *determinan el mismo subesquema cerrado de* Proj S*.*

Demostración. Consideremos los epimorfismos canónicos $\varphi_1 \colon S \to S/I$ y $\varphi_2 \colon S \to S/I'$, entonces de la proposición anterior, item (c), tenemos que los morfismos inducidos $f_1 \colon$ Proj $S/I \to$ Proj S y $f_2 \colon$ Proj $S/I' \to$ Proj S son inmersiones cerradas. Por otro lado, consideremos el homomorfismo natural $\varphi \colon S/I' \to S/I$; de la definición de I', tenemos que $I'_d = I_d$ para todo $d \geq d_0$ y consecuentemente tenemos las identidades $\varphi_d \colon (S/I')_d \to (S/I)_d$ para todo $d \geq d_0$, y por el item (b) de la proposición anterior, $f \colon$ Proj $S/I \to$ Proj S/I' es un isomorfismo. Finalmente, el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Proj}\ S/I \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f_1"'] & & \mathrm{Proj}\ S/I' \arrow[dl, "f_2"] \\
& \mathrm{Proj}\ S &
\end{tikzcd}
$$

es conmutativo, desde que tenemos el diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
S/I & & S/I' \arrow[ll, "\varphi"'] \\
& S \arrow[ul, "\varphi_2"] \arrow[ur, "\varphi_1"'] &
\end{tikzcd}
$$

De esta manera los subesquemas cerrados $f_1(\text{Proj } S/I)$ y $f_2(\text{Proj } S/I')$ coinciden en Proj S.

□

Capítulo 4

El Teorema de Correspondencia de Serre

En este capítulo consta la parte central de este trabajo, veremos, informalmente hablando, que la categoría de los haces coherentes sobre un esquema afín es equivalente a la que la categoría de módulos finitamente generados sobre un anillo noetheriano, ver Teorema 4.2.5. Luego expondremos el resultado principal de este trabajo: la categoría de los haces coherentes sobre un esquema proyectivo es equivalente a la categoría de módulos graduados de tipo casi finito, ver Teorema 4.4.32.

Comenzaremos definiendo los haces de módulos y mostraremos algunas propiedades básicas.

4.1 Haces de $\mathcal{O}_X$-Módulos

Definición 4.1.1. Sean X un espacio topológico y $\mathcal{O}$ un prehaz de anillos sobre X. Un *prehaz de* $\mathcal{O}$-módulo es un prehaz $\mathcal{F}$ de grupos abelianos sobre X tal que para cada subconjunto abierto U de X, el grupo $\mathcal{F}(U)$ es un $\mathcal{O}(U)$-módulo y para cada inclusión de conjuntos abiertos $V \subseteq U$, el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(U) \times \mathcal{F}(U) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}(U) \arrow[d] \\ \mathcal{O}(V) \times \mathcal{F}(V) \arrow[r] & \mathcal{F}(V) \end{tikzcd}$$

es conmutativo, donde las flechas horizontales son las acciones de módulo, la flecha de la vertical izquierda es la restricción de $\mathcal{F}$ y la fecha vertical derecha es la aplicación natural inducida por las restricciones de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{O}$. Más precisamente, dados $a \in \mathcal{O}(U)$ y $s \in \mathcal{F}(U)$, entonces se tiene $a|_V.s|_V = (a.s)|_V$. Si $\mathcal{O}$ y $\mathcal{F}$ son ambos haces, diremos que $\mathcal{F}$ es un *haz de* $\mathcal{O}$-módulo. Un *morfismo* $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ de prehaces de $\mathcal{O}$-módulo es un morfismo de prehaces tal que para cada subconjunto abierto U de X, el homomorfismo de grupos $\varphi(U)\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ es un homomorfismo de $\mathcal{O}(U)$-módulos. Un *morfismo* $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ de haces de $\mathcal{O}$-módulos se define del mismo modo que un morfismo de prehaces de $\mathcal{O}$-módulos.

Proposición 4.1.1. *Sea X un espacio topológico, $\mathcal{O}$ un prehaz de anillos sobre X y sea $\mathcal{F}$ una prehaz de $\mathcal{O}$-módulo, entonces el haz asociado $\mathcal{F}^+$ tiene una estructura natural de haz de $\mathcal{O}^+$-módulo.*

Demostración. De la Proposición 3.1.12 y la Observación 3.1.7, tenemos que para cada subconjunto abierto U de X, $\mathcal{O}^+(U)$ es el anillo de funciones $\lambda\colon U \to \bigsqcup_{p\in U} \mathcal{O}_p$ que satisfacen las siguientes propiedades:

(i) $\lambda(p) \in \mathcal{O}_p$ para todo $p \in U$,

(ii) para cada $p \in U$ existe una vecindad abierta $V \subseteq U$ de p y existe un elemento $r \in \mathcal{O}(V)$ tal que $\lambda(q) = r_q$ para todo $q \in V$.

y $\mathcal{F}^+(U)$ es el grupo aditivo de funciones $f\colon U \to \bigsqcup_{p\in U} \mathcal{F}_p$ tal que:

(i') $f(p) \in \mathcal{F}_p$ para todo $p \in U$,

(ii') para cada $p \in U$ existe una vecindad abierta $V \subseteq U$ de p y existe un elemento $s \in \mathcal{F}(V)$ tal que $f(q) = s_q$ para todo $q \in V$.

Definimos la acción $\mathcal{O}^+(U) \times \mathcal{F}^+(U) \to \mathcal{F}^+(U)$ dado por $(\lambda, f) \mapsto \lambda.f$, donde

$$(\lambda.f)(p) := \lambda(p)f(p) \text{ para todo } p \in U\,.$$

No hay dificultad en ver que esta aplicación está bien definida y dota a $\mathcal{F}^+$ la estructura de un haz de $\mathcal{O}^+$-módulo. □

Definición 4.1.2. Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado, si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son dos $\mathcal{O}_X$-módulos, al grupo de morfismos de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{G}$ denotaremos por $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, algunas veces escribiremos $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ si no hay confusión. Una sucesión de $\mathcal{O}_X$-módulos y morfismos es *exacta* si es exacta como una sucesión de haces de grupos abelianos. Si U es un subconjunto abierto de X, y si $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo, entonces $\mathcal{F}_U$ es un $\mathcal{O}_X|_U$-módulo. Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son dos $\mathcal{O}_X$-módulos, el prehaz

$$U \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{F}_U, \mathcal{G}_U)$$

es un haz el cual es llamado *haz Hom* y es denotado por $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$; también definimos el *producto tensorial* $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ de dos $\mathcal{O}_X$-módulos como el haz asociado al prehaz $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$, y por brevedad escribiremos a este prehaz por $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$. Sea $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ una familia de $\mathcal{O}_X$-módulos. La *suma directa* $\mathcal{F} = \bigoplus_{i\in I} \mathcal{F}_i$ es el haz asociado al prehaz $U \mapsto \bigoplus_{i\in I} \mathcal{F}_i(U)$. Un $\mathcal{O}_X$-módulo $\mathcal{F}$ es libre si es isomorfo a una suma directa de copias de $\mathcal{O}_X$; este es *localmente libre* si X puede ser cubierto por conjuntos abiertos U para el cual $\mathcal{F}|_U$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo libre, en este caso el *rango* de $\mathcal{F}$ en tal conjunto abierto es el número de copias de la estructura de haz (finita o infinita). Si X es conexo, el rango de un haz localmente libre se define de la misma manera. Un haz localmente libre de rango 1 es llamado *haz inversible.*

Sea $f\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ un morfismo de espacios anillados. Si $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo, entonces $f_*\mathcal{F}$ es un $f_*\mathcal{O}_X$-módulo. Puesto que tenemos el morfismo de haces de anillos sobre Y, $f^\sharp\colon \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$, esta da a $f_*\mathcal{F}$ una estructura natural de $\mathcal{O}_Y$-módulo, llamado *imagen directa* de $\mathcal{F}$ por el morfismo f.

Si $\mathcal{G}$ es un haz de $\mathcal{O}_Y$-módulo, entonces $f^{-1}\mathcal{G}$ es un $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-módulo, luego por la Proposición 3.1.24 tenemos un morfismo de haces de anillos $f^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$ sobre X, esto nos permite definir $f^*\mathcal{G}$ como el producto tensorial $f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$.

Observación 4.1.1. Sea X un espacio topológico, $\mathcal{O}$ un prehaz de anillos y $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ dos prehaces de $\mathcal{O}$-módulos, entonces $\mathcal{F}^+$ y $\mathcal{G}^+$ son haces de $\mathcal{O}^+$-módulos, y el haz producto tensorial de $\mathcal{F}^+$ y $\mathcal{G}^+$ coincide con el haz asociado del prehaz producto tensorial de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$.

En lo que sigue X será un espacio topológico y $\mathcal{B}$ será una base de abiertos de X.

Definición 4.1.3. Sean $\mathcal{F}$ un $\mathcal{B}$-prehaz de grupos abelianos y $\mathcal{O}$ un $\mathcal{B}$-prehaz de anillos. Diremos que $\mathcal{F}$ es un *$\mathcal{B}$-prehaz de $\mathcal{O}$-módulo*, si para cada $V \in \mathcal{B}$, el grupo $\mathcal{F}(V)$ es un $\mathcal{O}(V)$-módulo y para cada inclusión de abiertos básicos $W \subseteq V$, $\rho_{VW}(sf) = \sigma_{VW}(s)\rho_{VW}(f)$ para todo $s \in \mathcal{O}(V)$ y $f \in \mathcal{F}(V)$, donde ρ_{VW} y σ_{VW} son las restricciones en $\mathcal{F}$ y $\mathcal{O}$ respectivamente. En la definición anterior, si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{O}$ son $\mathcal{B}$-haces, entonces diremos que $\mathcal{F}$ es un *$\mathcal{B}$-haz de $\mathcal{O}$-módulo*

Un *morfismo* $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ de $\mathcal{B}$-prehaces de $\mathcal{O}$-módulos es un morfismo de $\mathcal{B}$-prehaces tal que para cada abierto $V \in \mathcal{B}$, la aplicación $\mathcal{F}(V) \to \mathcal{G}(V)$ es un homomorfismo de $\mathcal{O}_X(V)$-módulos. Un *morfismo* $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ de $\mathcal{B}$-haces de $\mathcal{O}$-módulos tiene la misma definición que un morfismo de $\mathcal{B}$-prehaces de $\mathcal{O}$-módulos.

Proposición 4.1.2. *Sean $\mathcal{O}$ un $\mathcal{B}$-prehaz de anillos y $\mathcal{F}$ un $\mathcal{B}$-prehaz de $\mathcal{O}$-módulo. Entonces (según la notación de la Proposición 3.1.8) $\mathcal{F}'$ es un $\mathcal{O}'$-módulo de prehaces. Además, si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{O}$ son $\mathcal{B}$-haces de grupos y anillos respectivamente, entonces $\mathcal{F}'$ es un haz de $\mathcal{O}'$-módulo.*

Demostración. Por la Proposición 3.1.8, $\mathcal{F}'$ es un prehaz de grupos abelianos y por la Observación 3.1.6, $\mathcal{O}'$ es un prehaz de anillos sobre X. Dado un subconjunto abierto $U \subseteq X$, por definición tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'(U) &= \varprojlim_{V\subseteq U,\, V\in\mathcal{B}} \mathcal{F}(V) \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{el conjunto de familias } (f_V)_{V\subseteq U, V\in\mathcal{B}} \in \prod_{V\subseteq U, V\in\mathcal{B}} \mathcal{F}(V) \text{ tal} \\ \text{que } \rho_{VW}(f_V) = f_W \text{ siempre que } W \subseteq V \subseteq U \text{ con } V, W \in \mathcal{B} \end{array} \right\}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{O}'(U) &= \varprojlim_{V\subseteq U,\, V\in\mathcal{B}} \mathcal{O}(V) \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{el conjunto de familias } (r_V)_{V\subseteq U, V\in\mathcal{B}} \in \prod_{V\subseteq U, V\in\mathcal{B}} \mathcal{O}(V) \text{ tal} \\ \text{que } \varrho_{VW}(r_V) = r_W \text{ siempre que } W \subseteq V \subseteq U \text{ con } V, W \in \mathcal{B} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Definimos la aplicación $\mathcal{O}'(U) \times \mathcal{F}'(U) \to \mathcal{F}'(U)$ como

$$((r_V)_{V\subseteq U}, (f_V)_{V\subseteq U}) \mapsto (r_V f_V)_{V\subseteq U}\,.$$

Esta aplicación define naturalmente una acción de $\mathcal{O}'(U)$ sobre $\mathcal{F}'(U)$, de esta manera $\mathcal{F}'(U)$ es un $\mathcal{O}'(U)$-módulo. Sean $U' \subseteq U$ dos abiertos de X, tenemos por definición que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}'(U) \times \mathcal{F}'(U) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}'(U) \arrow[d] \\ \mathcal{O}'(U') \times \mathcal{F}'(U') \arrow[r] & \mathcal{F}'(U') \end{tikzcd}$$

es conmutativo, lo cual prueba que $\mathcal{F}'$ es un $\mathcal{O}'$-módulo de prehaces. Por otro lado, si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{O}$ son $\mathcal{B}$-haces, entonces por la Proposición 3.1.8 y Observación 3.1.6, $\mathcal{F}'$ y $\mathcal{O}'$ son haces de grupos y anillos respectivamente, luego $\mathcal{F}'$ es un haz de $\mathcal{O}'$-módulo. □

Proposición 4.1.3. *Sea $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de $\mathcal{B}$-prehaces de $\mathcal{O}$-módulos. Entonces existe un morfismo $\varphi'\colon \mathcal{F}' \to \mathcal{G}'$ de prehaces de $\mathcal{O}$-módulos que extiende a φ. Además, si $\psi\colon \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ es un morfismo de $\mathcal{B}$-prehaces de $\mathcal{O}$-módulos y $id_{\mathcal{F}}\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ es el morfismo identidad, entonces $(\psi\circ\varphi)' = \psi'\circ\varphi'$ y $(id_{\mathcal{F}})' = id_{\mathcal{F}'}$. En particular si φ es un isomorfismo entonces φ' es también un isomorfismo.*

Demostración. Consideremos el morfismo de prehaces de grupos $\varphi'\colon \mathcal{F}' \to \mathcal{G}'$, dada en la Proposición 3.1.9. Entonces para cada abierto U de X, tenemos el homomorfismo de grupos $\varphi'(U)\colon \mathcal{F}'(U) \to \mathcal{G}'(U)$ dado por $(f_V)_{V\subseteq U, V\in\mathcal{B}} \mapsto \big(\varphi(V)(f_V)\big)_{V\subseteq U, V\in\mathcal{B}}$. Resta entonces verificar que $\varphi'(U)$ es un homomorfismo de $\mathcal{O}'(U)$-módulos, en efecto, dados $(f_V)_{V\subseteq U} \in \mathcal{F}'(U)$ y $(r_V)_{V\subseteq U} \in \mathcal{O}'(U)$, tenemos

$$\begin{aligned}\varphi'(U)((r_V)_{V\subseteq U}(f_V)_{V\subseteq U}) &= \varphi'(U)((r_V f_V)_{V\subseteq U}) = \big(\varphi(V)(r_V f_V)\big)_{V\subseteq U}\\ &= \big(r_V\varphi(V)(f_V)\big)_{V\subseteq U} = (r_V)_{V\subseteq U}\ \varphi'(U)((f_V)_{V\subseteq U})\,.\end{aligned}$$

Por otro lado, si $\psi\colon \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ es un morfismo de $\mathcal{B}$-prehaces de $\mathcal{O}'$-módulos y $id_{\mathcal{F}}\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ es el morfismo identidad, entonces por la Proposición 3.1.9, tenemos que $(\psi\circ\varphi)' = \psi'\circ\varphi'$ y $(id_{\mathcal{F}})' = id_{\mathcal{F}'}$ como morfismos de prehaces de grupos, por tanto también como morfismo de $\mathcal{O}'$-módulos. □

Observación 4.1.2. Los $\mathcal{B}$-prehaces de $\mathcal{O}$-módulos (resp. los $\mathcal{B}$-haces de $\mathcal{O}$-módulos) junto con sus respectivos morfismos antes definidos forman una categoría denotado por $\mathcal{B}$-$\mathfrak{PreMod}$ (resp. $\mathcal{B}$-$\mathfrak{Mod}$). La Proposición 3.1.9 nos dice que la correspondencia $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}'$ es un funtor covariante de $\mathcal{B}$-$\mathfrak{PreMod}$ sobre $\mathfrak{PreMod}(X)$. Asimismo, si $\mathcal{F} \in \mathcal{B}$-$\mathfrak{Mod}$ la correspondencia $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}'$ es un funtor covariante de $\mathcal{B}$-$\mathfrak{Mod}$ sobre $\mathfrak{Mod}(X)$.

Proposición 4.1.4. *Sean $\mathcal{O}$ un prehaz de anillos sobre X y $\mathcal{F}$ un prehaz de $\mathcal{O}$-módulo. Si $\mathcal{F}'$ es el prehaz de $\mathcal{O}'$-módulo que extiende al $\mathcal{B}$-prehaz $V \mapsto \mathcal{F}(V)$ con $V \in \mathcal{B}$, entonces el haz asociado de $\mathcal{F}'$ es isomorfo al haz asociado de $\mathcal{F}$ como $\mathcal{O}$-módulos.*

Demostración. Sea U un abierto de X, para cada $V \in \mathcal{B}$ con $V \subseteq U$, consideremos el homomorfismo $\theta_V\colon \mathcal{F}'(U) \to \mathcal{F}^+(V)$ dado por $(f_V)_{V\subseteq U} \mapsto \overline{f}_V$. Podemos comprobar que $\overline{f}_V|_{V\cap W} = \overline{f}_W|_{V\cap W}$ para todo $V, W \in \mathcal{B}$ tal que $V, W \subseteq U$, entonces por el Lema 3.1.15, existe un único homomorfismo $\theta(U)\colon \theta_V\colon \mathcal{F}'(U) \to \mathcal{F}^+(U)$ tal que $\theta(U)(t)|_V = \overline{f}_V$ para todo $t = (f_V)_{V\subseteq U} \in \mathcal{F}'(U)$ y $V \in \mathcal{B}$ con $V \in U$. Podemos comprobar inmediatamente que θ conmuta con las restricciones, de esta manera $\theta\colon \mathcal{F}' \to \mathcal{F}^+$ es un morfismo de prehaces. A continuación veamos que el par $(\mathcal{F}^+, \theta)$ satisface la propiedad universal de hacificación de la Proposición 3.1.12. En efecto, sea $\mathcal{G}$ un haz sobre X y $\varphi\colon \mathcal{F}' \to \mathcal{G}$ un morfismo de prehaces. Sea U un abierto de X y $s \in \mathcal{F}^+(U)$, entonces (por la construcción de $\mathcal{F}^+$), existe un cubrimiento $\{U_i\}_{i\in I}$ de U y existen elementos $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tal que $s|_{U_i} = \overline{f}_i$ para todo $i \in I$. Sea $t_i = \varphi(U_i)((f_i|_V))_{V\subseteq U_i}$. Podemos comprobar que los $t_i \in \mathcal{G}(U_i)$ son compatibles, luego existe una única sección $t \in \mathcal{G}(U)$ tal que $t|_{U_i} = t_i$ para todo $i \in I$. Podemos comprobar que t sólo depende de s y no del cubrimiento $\{U_i\}_{i\in I}$ ni de los elementos f_i tomados, esto nos una aplicación $\psi(U)\colon \mathcal{F}^+(U) \to \mathcal{G}(U)$ y podemos verificar que esto nos da un morfismo $\psi\colon \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$ y es único para la cual el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}' \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\theta"'] & \mathcal{G} \\ & \mathcal{F}^+ \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

es conmutativo. □

Corolario 4.1.5. *Sea $\mathcal{O}$ un haz de anillos sobre X, sean $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ dos haces de $\mathcal{O}$-módulo y sean $\mathcal{F}', \mathcal{G}'$ dos prehaces de $\mathcal{O}$-módulos tal que $\mathcal{F} = (\mathcal{F}')^+$ y $\mathcal{G} = (\mathcal{G}')^+$. Si $\varphi'\colon \mathcal{F}' \to \mathcal{G}'$ es un morfismo de $\mathcal{B}$-prehaces de $\mathcal{O}$-módulos, entonces φ' induce un morfismo $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ de haces de $\mathcal{O}$-módulos. En particular, si $\mathcal{F} \cong \mathcal{G}$ como prehaces $\mathcal{B}$-prehaces de $\mathcal{O}$-módulos, entonces $\mathcal{F} \cong \mathcal{G}$ como haces de $\mathcal{O}$-módulos.*

Demostración. Por la Proposición 4.1.3, el morfismo φ' se extiende a un morfismo de prehaces $\varphi''\colon \mathcal{F}'' \to \mathcal{G}''$, luego tenemos el morfismo de haces $(\varphi'')^+\colon (\mathcal{F}'')^+ \to (\mathcal{G}'')^+$ y por la Proposición 4.1.4, $(\mathcal{F}'')^+ = \mathcal{F}$ y $(\mathcal{G}'')^+ = \mathcal{G}$, de esta manera $\varphi := (\varphi'')^+\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es un morfismo de haces inducido por φ. Por otro lado, si φ' es un isomorfismo, por la Proposición 4.1.3, φ'' es también un isomorfismo, y como el funtor $.^+$ es exacto, el morfismo φ definido antes es un isomorfismo. □

Proposición 4.1.6. *Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado y sea $\mathcal{F}$ un haz de $\mathcal{O}_X$-módulo. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(a) *$\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X \cong \mathcal{F} \cong \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$.*

(b) *Si $\mathcal{G}$ es un haz de $\mathcal{O}_X$-módulo y U es un abierto de X, entonces*

$$(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})|_U \cong \mathcal{F}|_U \otimes_{\mathcal{O}_X|_U} \mathcal{G}|_U$$

(c) *Si U es un abierto de X e $\imath\colon U \hookrightarrow X$ es el morfismo inclusión, entonces $\imath^*\mathcal{F} \cong \mathcal{F}\big|_U$.*

Demostración. (a). Por definición $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X$ es el haz asociado al prehaz $\mathcal{H}\colon U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_X(U)$. Por otro lado, tenemos el isomorfismo $\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_X(U)$ dado por $s \mapsto s \otimes 1$, y para dos abiertos $V \subseteq U$ de X es evidente que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d] & \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_X(U) \arrow[d] \\ \mathcal{F}(V) \arrow[r, Rightarrow] & \mathcal{F}(V) \otimes_{\mathcal{O}_X(V)} \mathcal{O}_X(V) \end{tikzcd}$$

es conmutativo; esto implica que $\mathcal{F} \cong \mathcal{H}$ como prehaces de $\mathcal{O}_X$-módulos. Por el Corolario 4.1.5, $\mathcal{F} \cong \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X$ como haces de $\mathcal{O}_X$-módulos. Con un procedimiento análogo obtenemos también que $\mathcal{F} \cong \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$.

(b). Sea $\mathcal{H}$ el prehaz $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$. Si fijamos un abierto U de X, para todo abierto $V \subseteq U$ tenemos

$$\mathcal{H}|_U(V) = \mathcal{H}(V) = \mathcal{F}(V) \otimes_{\mathcal{O}_X(V)} \mathcal{G}(V) = \mathcal{F}|_U(V) \otimes_{\mathcal{O}_X|_U(V)} \mathcal{G}|_U(V)$$

luego por el Corolario 4.1.5 tenemos $(H|_U)^+ \cong \mathcal{F}|_U \otimes_{\mathcal{O}_X|_U} \mathcal{G}|_U$, y puesto que la restricción de un haz conmuta con el funtor hacificación obtenemos $(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}) \cong \mathcal{F}|_U \otimes_{\mathcal{O}_X|_U} \mathcal{G}|_U$.

(c). El haz $\imath^*\mathcal{F}$ es un $\mathcal{O}_U$-módulo, luego

$$\imath^*\mathcal{F} = (\imath^*\mathcal{F})|_U \cong (\imath^{-1}\mathcal{F} \otimes_{\imath^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X)\big|_U \cong \mathcal{F}|_U \otimes_{\mathcal{O}_X|_U} \mathcal{O}_X|_U \cong \mathcal{F}\big|_U .$$

□

Hasta el momento tenemos la noción de haz de módulos sobre un espacio anillado, ahora nos dedicaremos a estudiar un haz de módulos de carácter especial, definiremos el haz de módulos $\widetilde{M}$ sobre Spec A, asociado a un módulo M sobre un anillo A.

Definición 4.1.4 (El haz asociado a un módulo)**.** Sea A un anillo y M un A-módulo. Definimos el *haz asociado* a M sobre Spec A, denotado por $\widetilde{M}$ de la siguiente manera: para cualquier subconjunto abierto $U \subseteq \operatorname{Spec} A$, consideremos $\widetilde{M}(U)$ como el conjunto de funciones $s\colon U \to \bigsqcup_{\mathfrak{p}\in U} M_{\mathfrak{p}}$ tal que s es localmente un cociente: esto es, para cada $\mathfrak{p} \in U$, $s(\mathfrak{p}) \in M_{\mathfrak{p}}$, y existe un entorno abierto V de $\mathfrak{p}$ en U y elementos $m \in M$, $f \in A$, tal que para todo $\mathfrak{q} \in V$, $f \notin \mathfrak{q}$ y $s(\mathfrak{q}) = \frac{m}{f}$ en $M_{\mathfrak{q}}$.

Por otro lado, para cada $\mathfrak{p} \in U$ y $s_1, s_2 \in \widetilde{M}(U)$, la fórmula

$$(s_1 + s_2)(\mathfrak{p}) = s_1(\mathfrak{p}) + s_2(\mathfrak{p})$$

convierte a $\widetilde{M}(U)$ en un grupo (ver Proposición 3.2.1).

Proposición 4.1.7. *Sea A un anillo, M un A-módulo y sea $\widetilde{M}$ el haz en $X = \operatorname{Spec} A$ asociado a M. Se cumplen:*

(a) *$\widetilde{M}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo; donde $\mathcal{O}_X$ es el haz construido en la sección* 2.2.

(b) *Para cada $\mathfrak{p} \in X$, el tallo $(\widetilde{M})_{\mathfrak{p}}$ del haz $\widetilde{M}$ en $\mathfrak{p}$ es isomorfo al módulo localizado $M_{\mathfrak{p}}$.*

(c) *Para cualquier $f \in A$, el módulo $\widetilde{M}(D(f))$ es isomorfo al módulo localizado M_f.*

(d) *En particular, $\Gamma(X, \widetilde{M}) \cong M$.*

Demostración. (a). Fijemos un subconjunto abierto U de X. Dados los elementos $\rho \in \mathcal{O}_X(U)$, $s \in \widetilde{M}(U)$ y $\mathfrak{p} \in U$, definimos la aplicación $\rho.s\colon U \to \bigsqcup_{\mathfrak{p}\in U} M_{\mathfrak{p}}$ por $\mathfrak{p} \mapsto \rho(\mathfrak{p})s(\mathfrak{p})$. Para la buena definición, notemos que $M_{\mathfrak{p}}$ es un $A_{\mathfrak{p}}$-módulo, así $\rho(\mathfrak{p})s(\mathfrak{p}) \in M_{\mathfrak{p}}$. Ahora bien, existen entornos abiertos W y W' de $\mathfrak{p}$ en U tal que ρ y s son localmente un cociente en W y W', respectivamente. Luego la aplicación $\rho.s$ es localmente un cociente en $W \cap W'$; así que $\rho.s \in \widetilde{M}(U)$. Con la operación antes definida, es inmediato verificar que el grupo abeliano $\widetilde{M}(U)$ es un $\mathcal{O}_X(U)$-módulo. Finalmente, de la definición tenemos para todo par de abiertos $V \subseteq U$ que $(\rho.s)\big|_V = \rho\big|_V.s\big|_V$; por tanto $\widetilde{M}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo.

(b). Dado $\mathfrak{p} \in X$, definimos $(\widetilde{M})_{\mathfrak{p}} \to M_{\mathfrak{p}}$ dado por $\langle U, s\rangle \mapsto s(\mathfrak{p})$. El hecho que esta aplicación sea un isomorfismo es parte del argumento mostrado en la afirmación (a) de la Proposición 3.2.3.

(c). Sea $f \in A$ tal que $f \neq 0$ y definimos $\psi\colon M_f \to \widetilde{M}(D(f))$ por $\frac{m}{f^k} \mapsto s$, donde $s\colon D(f) \to \bigsqcup_{\mathfrak{p}\in D(f)} M_{\mathfrak{p}}$ está dado por $\mathfrak{p} \mapsto \frac{m}{f^k} \in M_{\mathfrak{p}}$. El isomorfismo es consecuencia de la afirmación (b) en la Proposición 3.2.3.

(d). Haciendo $f = 1$, tenemos $X = D(1)$ y $\widetilde{M}(X) \cong M_1 = M$. □

Proposición 4.1.8. *Sean A, B anillos, $X = \operatorname{Spec} B$ e $Y = \operatorname{Spec} B$. Consideremos un homomorfismo de anillos $\rho\colon A \to B$ y su morfismo correspondiente $f\colon Y \to X$. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(a) *La correspondencia $M \mapsto \widetilde{M}$ es un funtor exacto y plenamente fiel de la categoría de A-módulos en la categoría de $\mathcal{O}_X$-módulos.*

(b) *Si M, N son dos A-módulos, entonces $(M \otimes_A N)\widetilde{\ } \cong \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{N}$.*

(c) *Si $\{M_i\}_{i\in I}$ es cualquier familia de A-módulos, $\big(\bigoplus_{i\in I} M_i\big)\widetilde{\ } \cong \bigoplus_{i\in I} \widetilde{M_i}$.*

(d) *Para todo B-módulo N tenemos $f_*(\widetilde{N}) \cong ({}_A N)\widetilde{\ }$, donde ${}_A N$ indica N como A-módulo.*

(e) *Para todo A-módulo M tenemos $f^*(\widetilde{M}) \cong (M \otimes_A B)\widetilde{\ }$.*

Demostración. (*a*). Sea F la aplicación que hace corresponder a cada A-módulo M el haz $\widetilde{M}$ de $\mathcal{O}_X$-módulo, y a cada homomorfismo de A-módulos $\varphi\colon M \to N$, el morfismo de haces $\widetilde{\varphi}\colon \widetilde{M} \to \widetilde{N}$, donde para cada abierto U de X, el homomorfismo $\widetilde{\varphi}(U)\colon \widetilde{M}(U) \to \widetilde{N}(U)$ está definido como $\widetilde{\varphi}(U)(s)(\mathfrak{p}) = \varphi_{\mathfrak{p}}(s(\mathfrak{p}))$ para todo $\mathfrak{p} \in U$ y $s \in \widetilde{M}(U)$, siendo $\varphi_{\mathfrak{p}}\colon M_{\mathfrak{p}} \to N_{\mathfrak{p}}$ el homomorfismo definido por $\frac{m}{\lambda} \mapsto \frac{\varphi(m)}{\lambda}$. Veamos que F es un funtor covariante. Sean $\varphi\colon M \to N$ y $\psi\colon N \to P$ dos homomorfismos de A-módulos; para cada punto $\mathfrak{p} \in X$, la correspondencia $M \mapsto M_{\mathfrak{p}}$ es un funtor covariante de la categoría de A-módulos a la categoría de $A_{\mathfrak{p}}$-módulos, de esto se cumple naturalmente que $(\psi\circ\varphi)\widetilde{\ } = \widetilde{\psi}\circ\widetilde{\varphi}$; en efecto, tomemos un subconjunto abierto U de X, $s \in \widetilde{M}(U)$ y $\mathfrak{p} \in U$, entonces

$$\begin{aligned}(\psi \circ \varphi)\widetilde{\ }(s)(\mathfrak{p}) &= (\psi \circ \varphi)_{\mathfrak{p}}(s(\mathfrak{p})) = (\psi_{\mathfrak{p}} \circ \varphi_{\mathfrak{p}})(s(\mathfrak{p})) = \psi_{\mathfrak{p}}(\widetilde{\varphi}(U)(s)(\mathfrak{p}))\\ &= \widetilde{\psi}(U) \circ \widetilde{\varphi}(U)(s)(\mathfrak{p}) = (\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\varphi})(U)(s)(\mathfrak{p}).\end{aligned}$$

También, si id_M es la identidad de M, tenemos

$$\widetilde{id_M}(U)(s)(\mathfrak{p}) = (id_M)_{\mathfrak{p}}(s(\mathfrak{p})) = s(\mathfrak{p}) = id_{\widetilde{M}}(U)(s)(\mathfrak{p})\,,$$

luego $\widetilde{id_M} = id_{\widetilde{M}}$; por tanto F es un funtor covariante. Tomemos ahora la siguiente sucesión exacta de A-módulos y homomorfismos

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} P \longrightarrow 0\,.$$

Puesto que F es covariante, tenemos la sucesión de morfismos de haces

$$0 \longrightarrow \widetilde{M} \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} \widetilde{N} \xrightarrow{\widetilde{\psi}} \widetilde{P} \longrightarrow 0\,. \tag{4.1.1}$$

Luego para cualquier $\mathfrak{p} \in X$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (\widetilde{M})_{\mathfrak{p}} \arrow[r, "\widetilde{\varphi}_{\mathfrak{p}}"] \arrow[d, Rightarrow] & (\widetilde{N})_{\mathfrak{p}} \arrow[r, "\widetilde{\psi}_{\mathfrak{p}}"] \arrow[d, Rightarrow] & (\widetilde{P})_{\mathfrak{p}} \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_{\mathfrak{p}} \arrow[r, "\varphi_{\mathfrak{p}}"] & N_{\mathfrak{p}} \arrow[r, "\psi_{\mathfrak{p}}"] & P_{\mathfrak{p}} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde las flechas verticales son isomorfismos según la afirmación (b) de la Proposición 4.1.7, y la fila horizontal inferior del diagrama es exacta para cada $\mathfrak{p} \in X$. De acuerdo a la Proposición 3.1.18 obtenemos que la sucesión (4.1.1) es exacta; así F es un funtor exacto. Veamos finalmente que el funtor F es plenamente fiel, es decir, si M y N son dos A-módulos, debemos probar que la aplicación $\theta\colon \operatorname{Hom}_A(M,N) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\widetilde{M},\widetilde{N})$ definida por $\varphi \mapsto \widetilde{\varphi}$ es una biyección. En efecto, sean $\varphi, \psi \in \operatorname{Hom}_A(M,N)$ tal que $\widetilde{\varphi} = \widetilde{\psi}$, de aquí, $\widetilde{\varphi}(X) = \widetilde{\psi}(X)$. Tomemos ahora un elemento arbitrario $m \in M$ y sea $s \in \widetilde{M}(X)$ tal que $s(\mathfrak{p}) = \frac{m}{1}$ para todo $\mathfrak{p} \in X$, entonces conseguimos

$$\frac{\varphi(m)}{1} = \varphi_{\mathfrak{p}}\Big(\frac{m}{1}\Big) = \widetilde{\varphi}(X)(s(\mathfrak{p})) = \widetilde{\psi}(X)(s(\mathfrak{p})) = \psi_{\mathfrak{p}}\Big(\frac{m}{1}\Big) = \frac{\psi(m)}{1}$$

luego $\frac{\varphi(m)}{1} = \frac{\psi(m)}{1}$ para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de A, esto implica que $\varphi(m) = \psi(m)$, y como m es arbitrario, $\varphi = \psi$. Esto demuestra la inyectividad de θ.

Veamos a continuación que θ es sobreyectiva. Sea $\phi \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\widetilde{M},\widetilde{N})$, de donde $\phi(X)\colon \widetilde{M}(X) \to \widetilde{N}(X)$ es un homomorfismo de $\mathcal{O}_X(X)$-módulos. De acuerdo a los isomorfismos

$$\widetilde{M}(X) \cong M, \quad \widetilde{N}(X) \cong N \quad \text{y} \quad \mathcal{O}_X(X) \cong A,$$

podemos considerar a $\varphi := \phi(X)$ como un homomorfismo de A-módulos de M en N. Afirmamos que $\widetilde{\varphi} = \phi$, en efecto, tomemos un abierto U de X y sea $s \in \widetilde{M}(U)$. De acuerdo a la definición 4.1.4, podemos expresar a s localmente como un cociente; osea, para cada punto de U existe un abierto $V \subseteq U$ conteniendo dicho punto, y elementos $m \in M$, $f \in A$ tal que $s(\mathfrak{p}) = m/f$ en $M_{\mathfrak{p}}$ para todo punto $\mathfrak{p} \in V$ con $f \notin \mathfrak{p}$; por abuso de notación escribimos $s\big|_V = m/f$. Para un punto $\mathfrak{p} \in V$ arbitrario tenemos

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}(U)(s)\big|_V(\mathfrak{p}) &= \varphi_{\mathfrak{p}}(s(\mathfrak{p})) = \varphi_{\mathfrak{p}}(\frac{m}{f}) = \frac{\varphi(m)}{f} = \frac{\phi(X)(m)(\mathfrak{p})}{f} \\
&= \frac{1}{f}\Big(\phi(X)\big(m\big)\Big)\Big|_V(\mathfrak{p}) = \frac{1}{f}\phi(V)\big(\frac{m}{1}\big)(\mathfrak{p}) \\
&= \phi(V)\big(\frac{m}{f}\big)(\mathfrak{p}) = \phi(V)(s\big|_V)(\mathfrak{p}) = \phi(U)(s)\big|_V(\mathfrak{p})
\end{aligned}$$

por tanto, $\widetilde{\varphi}(U)(s)\big|_V = \phi(U)(s)\big|_V$. Desde que $\widetilde{N}$ es haz y los abiertos V cubren a U, se sigue $\widetilde{\varphi}(U)(s) = \phi(U)(s)$, y como s y U fueron tomados arbitrarios, tenemos que $\widetilde{\varphi} = \phi$, de esta manera θ es sobreyectiva.

(b) Sean M, N dos A-módulos. Por definición tenemos que $\widetilde{M}\otimes_{\mathcal{O}_X}\widetilde{N}$ es el haz asociado al prehaz $\mathcal{H}$ que envía un abierto U a $\widetilde{M}(U)\otimes_{\mathcal{O}_X(U)}\widetilde{N}(U)$. Tomando $U = D(f)$ tenemos

$$\mathcal{H}(D(f)) \cong M_f \otimes_{A_f} N_f \cong (M\otimes_A N)_f \cong (M\otimes_A N)^{\sim}(D(f))$$

y desde que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
M_f \otimes_{A_f} N_f \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d] & (M\otimes_A N)_f \arrow[d] \\
M_{fg} \otimes_{A_{fg}} N_{fg} \arrow[r, Rightarrow] & (M\otimes_A N)_{fg}
\end{tikzcd}$$

es conmutativo para todo $f, g \in A$, tenemos un isomorfismo de $\mathcal{B}$-prehaces $\mathcal{H} \xrightarrow{\sim} (M\otimes_A N)^{\sim}$ donde $\mathcal{B}$ está formado por los abiertos $D(f)$ con $f \in A$, entonces por el Corolario 4.1.5, $(M\otimes_A N)^{\sim} \cong \widetilde{M}\otimes_{\mathcal{O}_X}\widetilde{N}$.

(c) Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de A-módulos. El haz $\big(\bigoplus_{i\in I} M_i\big)^{\sim}$ es el haz asociado del prehaz $U \mapsto \bigoplus_{i\in I}\widetilde{M_i}(U)$. Si tomamos $U = D(f)$, entonces $\mathcal{H}(D(f)) \cong \bigoplus_{i\in I}(M_i)_f \cong (\bigoplus_{i\in I} M_i)_f \cong \big(\bigoplus_{i\in I} M_i\big)^{\sim}(D(f))$. Además, el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i\in I}(M_i)_f \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d] & (\bigoplus_{i\in I} M_i)_f \arrow[d] \\
\bigoplus_{i\in I}(M_i)_{fg} \arrow[r, Rightarrow] & (\bigoplus_{i\in I} M_i)_{fg}
\end{tikzcd}$$

es conmutativo para todo $f, g \in A$, luego tenemos un isomorfismo de $\mathcal{B}$-prehaces $\mathcal{H} \xrightarrow{\sim} \big(\bigoplus_{i\in I} M_i\big)^{\sim}$ donde $\mathcal{B}$ está formado por los abiertos $D(f)$ con $f \in A$, entonces por el Corolario 4.1.5, tenemos $\bigoplus_{i\in I}\widetilde{M_i} \cong \big(\bigoplus_{i\in I} M_i\big)^{\sim}$.

(d) Denotemos por $D_A(g)$ y $D_B(h)$ a los abiertos básicos de Spec A y Spec B respectivamente, donde $g \in A$ y $h \in B$. Debido a que tenemos un homomorfismo de anillos $A_g \to B_{\rho(g)}$ (dado por $\frac{a}{g^k} \mapsto \frac{\rho(a)}{\rho(g)^k}$), podemos considerar al $B_{\rho(g)}$-módulo $N_{\rho(g)}$ como un A_g-módulo. Luego, es inmediato verificar que la aplicación $\gamma_g\colon N_{\rho(g)} \to ({}_AN)_g$ dado por $\frac{n}{\rho(g)^k} \mapsto \frac{n}{g^k}$ es un isomorfismo de A_g-módulos. Por otra parte, tenemos

$$f_*(\widetilde{N})(D_A(g)) = \widetilde{N}(f^{-1}(D_A(g))) = \widetilde{N}(D_B(\rho(g))) \cong N_{\rho(g)}$$

y $({}_AN)^{\sim}(D_A(g)) \cong ({}_AN)_g$, además puesto que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
N_{\rho(g)} \arrow[r, Rightarrow, "\gamma_g"] \arrow[d] & ({}_AN)_g \arrow[d] \\
N_{\rho(gg')} \arrow[r, Rightarrow, "\gamma_{gg'}"] & ({}_AN)_{gg'}
\end{tikzcd}$$

es conmutativo para todo $g, g' \in A$, tenemos un isomorfismo de $\mathcal{B}$-haces $f_*(\widetilde{N}) \xrightarrow{\sim} ({}_AN)\tilde{}$, luego por el Corolario 4.1.5, $f_*(\widetilde{N}) \cong ({}_AN)\tilde{}$.

(e) Sea M un A-módulo. Dados $\mathfrak{p} \in Y = \operatorname{Spec} B$ y $\mathfrak{q} = f(\mathfrak{p})$, tenemos un isomorfismo $\psi_\mathfrak{p} \colon M_\mathfrak{q} \otimes_{A_\mathfrak{q}} B_\mathfrak{p} \to (M \otimes_A B)_\mathfrak{p}$ dado por $\frac{m}{\lambda\alpha} \otimes \frac{b}{\beta} \mapsto \frac{m\otimes b}{\rho(\lambda)\beta}$ (con inverso $\frac{a\otimes b}{\beta} \mapsto \frac{a}{1} \otimes \frac{b}{\beta}$). Para cada abierto V de Y definimos la aplicación $\phi(V) \colon (f^\bullet\widetilde{M} \otimes_{f^\bullet\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y)(V) \to (M \otimes_A B)\tilde{}(V)$ dada por $\langle U, s\rangle \otimes t \mapsto \xi$ donde $\xi(\mathfrak{p}) := \psi_\mathfrak{p}(s(f(\mathfrak{p}))\ t(\mathfrak{p}))$ para todo $\mathfrak{p} \in V$. La aplicación está bien definida, ya que si $\langle U, s\rangle = \langle U', s'\rangle$, por definición existe un abierto W de X tal que $f(V) \subseteq W \subseteq U \cap U'$ y $s|_W = s'|_W$, luego si $\mathfrak{p} \in V$ tenemos que $f(\mathfrak{p}) \in W$ y $s(f(\mathfrak{p})) = s'(f(\mathfrak{p}))$ así $\psi_\mathfrak{p}(s(f(\mathfrak{p}))t(\mathfrak{p})) = \psi_\mathfrak{p}(s'(f(\mathfrak{p}))\ t(\mathfrak{p}))$. A continuación veamos que $\phi(V)$ es un homomorfismo de $\mathcal{O}_Y(V)$-módulos; de la definición $\phi(V)$ ya es un homomorfismo de grupos; por otra parte, si $\lambda \in \mathcal{O}_Y(V)$ tenemos

$$\begin{aligned}
\phi(V)(\lambda\langle U,s\rangle \otimes t)(\mathfrak{p}) &= \phi(V)(\langle U,s\rangle \otimes t\lambda)(\mathfrak{p}) = \psi_\mathfrak{p}(s(f(\mathfrak{p}))(t\lambda)(\mathfrak{p})) \\
&= \psi_\mathfrak{p}(s(f(\mathfrak{p}))t(\mathfrak{p})\lambda(\mathfrak{p})) = \lambda(\mathfrak{p})\psi_\mathfrak{p}(s(f(\mathfrak{p}))t(\mathfrak{p})) \\
&= (\lambda\phi(V)(\langle U,s\rangle \otimes t))(\mathfrak{p})\,.
\end{aligned}$$

Luego $\phi(V)(\lambda\langle U, s\rangle \otimes t) = \lambda\phi(V)(\langle U, s\rangle \otimes t)$, lo que prueba que $\phi(V)$ es un homomorfismo de $\mathcal{O}_Y(V)$-módulos. Por otro lado, para dos abiertos $W \subseteq V$ de Y, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
f^\bullet\widetilde{M}(V) \otimes_{f^\bullet\mathcal{O}_X(V)} \mathcal{O}_Y(V) \arrow[r, "\phi(V)"] \arrow[d] & (M \otimes_A B)\tilde{}(V) \arrow[d] \\
f^\bullet\widetilde{M}(W) \otimes_{f^\bullet\mathcal{O}_X(W)} \mathcal{O}_Y(W) \arrow[r, "\phi(W)"'] & (M \otimes_A B)\tilde{}(W)
\end{tikzcd}$$

donde las flechas verticales son las restricciones naturales. De esta manera ϕ es un morfismo de prehaces. A continuación veamos que ϕ es un isomorfismo en los tallos, en efecto, tomemos $\mathfrak{p} \in Y$, $\mathfrak{q} = f(\mathfrak{p})$ y un abierto V de Y que contenga a $\mathfrak{p}$, entonces tenemos el diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
(f^{\bullet}\widetilde{M} \otimes_{f^{\bullet}\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y)(V) \arrow[r, "\phi(V)"] \arrow[d] & (M \otimes_A B)\tilde{}(V) \arrow[d] \\
(f^{\bullet}\widetilde{M})_{\mathfrak{p}} \otimes_{f^{\bullet}(\mathcal{O}_X)_{\mathfrak{p}}} \mathcal{O}_{Y,\mathfrak{p}} \arrow[r, "\phi_{\mathfrak{p}}"] \arrow[d, Rightarrow] & (M \otimes_A B)\tilde{}_{\mathfrak{p}} \arrow[dd, Rightarrow] \\
\widetilde{M}_{\mathfrak{q}} \otimes_{\mathcal{O}_{X,\mathfrak{q}}} \mathcal{O}_{Y,\mathfrak{p}} \arrow[d, Rightarrow] & \\
M_{\mathfrak{q}} \otimes_{A_{\mathfrak{q}}} B_{\mathfrak{p}} \arrow[r, Rightarrow, "\psi_{\mathfrak{p}}"] & (M \otimes_A B)_{\mathfrak{p}}
\end{tikzcd}
$$

donde de esta manera $\phi_{\mathfrak{p}}$ es un isomorfismo, luego ϕ es un isomorfismo de prehaces. Por la Observación 4.1.1, $f^*\widetilde{M}$ es el haz asociado del prehaz $f^{\bullet}\widetilde{M} \otimes_{f^{\bullet}\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y$, luego por el Corolario 4.1.5, $f^*\widetilde{M} \cong (M \otimes_A B)\tilde{}$. $\square$

4.2 Haces Coherentes y la Correspondencia Afín

En esta sección veremos la equivalencia de categorías entre los haces casi coherentes sobre un esquema afín y módulos finitamente generados, asimismo la equivalencia entre haces coherentes sobre un esquema afín y módulos finitamente generados sobre un anillo noetheriano.

Definición 4.2.1. Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un esquema. Un haz de $\mathcal{O}_X$-módulos $\mathcal{F}$ es *casi coherente* si X puede ser cubierto por subconjuntos abiertos afines $U_i = \operatorname{Spec}(A_i)$, tal que para cada i existe un A_i-módulo M_i con $\mathcal{F}\big|_{U_i} \cong \widetilde{M_i}$. Diremos que $\mathcal{F}$ es *coherente* si además cada M_i es un A_i-módulo finitamente generado.

Lema 4.2.1. *Sea X un esquema, $\mathcal{F}$ un haz casi coherente (resp. coherente) sobre X y sea U un subconjunto abierto de X, entonces $\mathcal{F}\big|_U$ es también casi coherente (resp. coherente)*

Demostración. Como $\mathcal{F}$ es haz casi coherente, existe un cubrimiento de X por abiertos afines $U_i = \operatorname{Spec} A_i$, tal que $\mathcal{F}\big|_{U_i} \cong \widetilde{M_i}$, donde M_i es un A_i-módulo para todo i. Por otro lado, como $U \cap U_i$ es abierto en U_i, este es unión de abiertos básicos $D_i(h_{ij})$ de U_i donde $h_{ij} \in A_i$ para todo j, así, variando i, j tenemos que los $D_i(h_{ij})$ cubren a U. Consideremos el morfismo inclusión $\imath\colon D(h_{ij}) \hookrightarrow U_i$ y su correspondiente homomorfismo asociado $A_i \to A_{h_{ij}}$, entonces tenemos

$$(\mathcal{F}\big|_U)\big|_{D(h_{ij})} = (\mathcal{F}\big|_{U_i})\big|_{D(h_{ij})} \cong \widetilde{M_i}\big|_{D(h_{ij})} \cong \imath^*\widetilde{M_i} \cong (M_i \otimes_{A_i} (A_i)_{h_{ij}})\tilde{}$$

donde la última igualdad viene de la Proposición 4.1.8; por tanto $\mathcal{F}\big|_U$ es casi coherente. Ahora, si $\mathcal{F}$ es coherente, cada M_i es un A_i-módulo finitamente generado, luego $M_i \otimes_{A_i} (A_i)_{h_{ij}}$ es también de generación finita como $(A_i)_{h_{ij}}$-módulo, por tanto $\mathcal{F}\big|_U$ es también haz coherente. □

Lema 4.2.2. *Sea $X = \text{Spec } A$ un esquema afín y $\mathcal{F}$ un haz casi coherente sobre X. Entonces existe un conjunto finito de elementos $g_1, \ldots, g_n$ de A, tal que X es cubierto por los abiertos básicos $D(g_i)$ y $\mathcal{F}\big|_{D(g_i)} \cong \widetilde{M_i}$ para todo i, donde cada M_i es un A_{g_i}-módulo.*

Demostración. Como $\mathcal{F}$ es casi coherente, por definición X es cubierto por abiertos afines $V = \text{Spec } B$ tal que $\mathcal{F}\big|_V \cong \widetilde{M}$ donde M es un B-módulo. Por otro lado, como los subconjuntos $D(g)$ con $g \in A$ forman una base para la topología de X, existe una familia $\{g_i\}_{i \in I}$ de elementos de A tal V es cubierto por los abiertos $D(g_i)$. Luego para cada inclusión $D(g_i) \subseteq V$ tenemos el morfismo inclusión $\imath\colon D(g_i) \hookrightarrow V$ que se corresponde con un homomorfismo de anillos $B \to A_{g_i}$, entonces

$$\mathcal{F}\big|_{D(g_i)} \cong (\mathcal{F}\big|_V)\big|_{D(g_i)} \cong \widetilde{M}\big|_{D(g_i)} = \imath^*\widetilde{M} \cong (M \otimes_B A_{g_i})\widetilde{\ }$$

donde $M_i = M \otimes_B A_{g_i}$ es un A_{g_i}-módulo. Ahora bien, considerando el cubrimiento de X formado por los abiertos básicos $D(g_i)$ contenidos en algún abierto afín V como antes; la propiedad de casi compacto nos dice que X es cubierto por un número finito de estos abiertos $D(g_i)$ con la condición requerida. □

Lema 4.2.3. *Sea $X = \text{Spec } A$ un esquema afín, sea $f \in A$ y $D(f) \subseteq X$ su correspondiente abierto básico, y sea también $\mathcal{F}$ un haz casi coherente sobre X. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(a) *Si $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ es una sección global de $\mathcal{F}$ cuya restricción a $D(f)$ es 0, entonces $f^n s = 0$ para algún $n > 0$.*

(b) *Dada una sección $t \in \mathcal{F}(D(f))$ de $\mathcal{F}$ sobre el abierto $D(f)$, entonces para algún $n > 0$, $f^n t$ se extiende a una seción global de $\mathcal{F}$ sobre X.*

Demostración. Como $\mathcal{F}$ es casi coherente sobre X, el lema anterior nos dice que existen $g_1, \ldots, g_r \in A$ tal que $X = \bigcup_{i=1}^r D(g_i)$ y $\mathcal{F}\big|_{D(g_i)} \cong \widetilde{M_i}$, donde cada M_i es un A_{g_i}-módulo. Por otro lado, tenemos que $D(f) = \bigcup_{i=1}^r D(fg_i)$ y $D(fg_i) \subseteq D(f)$.

(a). Tomemos una sección $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ y supongamos que $s\big|_{D(f)} = 0$. Para cada i, denotemos por s_i a la sección $s\big|_{D(g_i)} \in \mathcal{F}(D(g_i))$. De acuerdo a los isomorfismos

$$\mathcal{F}(D(g_i)) \cong \mathcal{F}\big|_{D(g_i)}(D(g_i)) \cong \widetilde{M_i}(\text{Spec } A_{g_i}) \cong M_i\,,$$

podemos considerar a s_i como un elemento de M_i, y de la hipótesis tenemos $s\big|_{D(fg_i)} = 0$ para cada $i = 1, \ldots, r$. Como $s\big|_{D(fg_i)} \in \mathcal{F}(D(fg_i))$ y $\mathcal{F}(D(fg_i)) \cong \widetilde{M_i}(D(\frac{f}{1})) \cong (M_i)_{\frac{f}{1}}$, tenemos que $s\big|_{D(fg_i)} = 0$ en $(M_i)_{\frac{f}{1}}$, entonces por la definición de localización, existe $n \geq 1$ (que depende de i), tal que $\frac{f}{1}^n s_i = 0$. Como el conjunto de índices i es finito, podemos tomar n suficientemente grande que no dependa de i. Por consiguiente, para cada i tenemos $(f^n s)\big|_{D(g_i)} = \frac{f}{1}^n s_i = 0$, y puesto que $\mathcal{F}$ es haz y $X = \bigcup_{i=1}^r D(g_i)$, resulta que $f^n s = 0$.

(b). Sea $t \in \mathcal{F}(D(f))$ y hagamos $t_i = t\big|_{D(fg_i)}$ para cada $i = 1, \ldots, r$. Puesto que $\mathcal{F}(D(fg_i)) \cong (M_i)_{\frac{f}{1}}$, podemos considerar a t_i como un elemento de $(M_i)_{\frac{f}{1}}$, además como tenemos una cantidad finita de índices i, tomando un entero n suficientemente grande, tenemos $t_i = \frac{t_i'}{(\frac{f}{1})^n}$ donde $t_i' \in M_i$ para cada i; luego

$$t_i'\big|_{D(fg_i)} = \frac{t_i'}{1} = \Big(\frac{f}{1}\Big)^n t_i' = \Big(\frac{f}{1}^n t_i\Big)\big|_{D(fg_i)}$$

Esta igualdad implica que $t_i\big|_{D(fg_ig_j)} = t_j\big|_{D(fg_ig_j)}$ para todo i, j, así tenemos

$$(t_i\big|_{D(g_ig_j)} - t_j\big|_{D(g_ig_j)})\big|_{D(fg_ig_j)} = 0.$$

Aplicando el ítem anterior al haz casi coherente $\mathcal{F}\big|_{D(g_ig_j)}$ sobre Spec $A_{g_ig_j}$ y a su sección global $t_i\big|_{D(g_ig_j)} - t_j\big|_{D(g_ig_j)}$, tenemos que $\frac{f}{1}^m(t_i\big|_{D(g_ig_j)} - t_j\big|_{D(g_ig_j)}) = 0$ para algún $m \geq 1$ (que depende de i, j), y tomando m suficientemente grande podemos hacer que m sea independiente de i y j. Luego tenemos que $(\frac{f}{1}^m t_i)\big|_{D(g_ig_j)} = (\frac{f}{1}^m t_j)\big|_{D(g_ig_j)}$ y puesto que $\mathcal{F}$ es haz y $X = \bigcup_{i=1}^r D(g_i)$, existe $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ tal que $s\big|_{D(g_i)} = \frac{f}{1}^m t_i$ para todo i, luego

$$s\big|_{D(fg_i)} = \frac{f}{1}^m\Big|_{D(fg_i)} \cdot t_i\Big|_{D(fg_i)} = \frac{f}{1}^m\Big|_{D(fg_i)} \cdot \Big(\frac{f}{1}^n \cdot t\Big)\Big|_{D(fg_i)} = \Big(\frac{f}{1}^{m+n} \cdot t\Big)\Big|_{D(fg_i)}.$$

Finalmente, de la igualdad $D(f) = \bigcup_{i=1}^r D(fg_i)$ y de la propiedad de haz de $\mathcal{F}$, obtenemos $s\big|_{D(f)} = \frac{f}{1}^{m+n} t := f^{m+n} t$. □

Proposición 4.2.4. *Sea X un esquema. Entonces un $\mathcal{O}_X$-módulo $\mathcal{F}$ es casi coherente si, y sólo si, para cada abierto afín $U =$ Spec A de X, existe un A-módulo M tal que $\mathcal{F}\big|_U \cong \widetilde{M}$. Si X es noetheriano, entonces $\mathcal{F}$ es coherente si y sólo si lo mismo es verdad, con la condición extra que M es un A-módulo finitamente generado.*

Demostración. Sea $U =$ Spec A un abierto afín de X. Si $\mathcal{F}$ un haz casi coherente (resp. coherente) sobre X, por el Lema 4.2.1, $\mathcal{F}\big|_U$ es también casi coherente (resp. coherente), entonces podemos suponer que $X = U$. Sea $M = \Gamma(X, \mathcal{F})$ y para cada $f \in A$ definimos un homomorfismo de A_f-módulos $\alpha(D(f))\colon M_f = \widetilde{M}(D(f)) \to \mathcal{F}(D(f))$ dado por $\frac{m}{f^k} \mapsto \frac{1}{f^k}.m\big|_{D(f)}$. Como los conjuntos $D(f)$ son abiertos básicos de X y además los homomorfismos $\alpha(D(f))$ conmutan con las restricciones, por pegamiento de morfismos, existe un único morfismo de haces de $\mathcal{O}_X$-módulos $\alpha\colon \widetilde{M} \to \mathcal{F}$. Veamos que este morfismo es un isomorfismo, para ello bastará probar que los homomorfismos $\alpha(D(f))$ son isomorfismos para cada $f \in A$. Sea $\frac{m}{f^k} \in M_f$ tal que $\frac{1}{f^k}.m\big|_{D(f)} = 0$, esto implica que $m\big|_{D(f)} = 0$ y por la primera afirmación del Lema 4.2.3 existe $n > 0$ tal que $f^n m = 0$, por tanto $\frac{m}{f^k} = 0$ y $\alpha(D(f))$ es inyectiva. Veamos la sobreyectividad, dado $t \in \mathcal{F}(D(f))$, por la segunda afirmación del Lema 4.2.3, existe $n > 0$ y $m \in M = \Gamma(X, \mathcal{F})$ tal que $m|_{D(f)} = f^n t$ luego $\alpha(D(f))(\frac{m}{f^n}) = t$; de esta manera concluimos que $\mathcal{F} \cong \widetilde{M}$. La parte recíproca es inmediata a partir de la definición de casi coherente y desde que los abiertos afines forman una base de la topología del espacio subyacente de un esquema. Supongamos ahora que X es noetheriano y $\mathcal{F}$ coherente. Por el Lema 4.2.2, existe un conjunto finito de elementos

$g_1, \ldots, g_n$ de A, tal que X es cubierto por los abiertos básicos $D(g_i)$ y $\mathcal{F}\big|_{D(g_i)} \cong \widetilde{M_i}$ para todo i, donde M_i es un A_{g_i}-módulo finitamente generado. De lo anterior ya tenemos que $\mathcal{F} \cong \widetilde{M}$ luego

$$M_{g_i} \cong \widetilde{M}(D(g_i)) \cong \mathcal{F}(D(g_i)) \cong \widetilde{M_i}(D(g_i)) \cong M_i$$

y sabemos que cada M_{g_i} es un A_{g_i}-módulo finitamente generado; ahora bien, desde que el anillo A es noetheriano, entonces A_{g_i} es también noetheriano y así M_{g_i} es noetheriano para cada i. Luego, por un argumento similar dado en la prueba del Teorema 3.4.2 se sigue que M es noetheriano, por tanto un A-módulo finitamente generado. $\square$

Teorema 4.2.5 (La correspondencia afín de Serre). *Sea A un anillo y $X = \operatorname{Spec} A$. El funtor $M \mapsto \widetilde{M}$ nos da una equivalencia de categorías entre la categoría de A-módulos y la categoría de $\mathcal{O}_X$-módulos casi coherentes. Su inversa es el funtor $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{F})$. Si A es noetheriano, el funtor anterior también nos da una equivalencia de categorías entre la categoría de A-módulos finitamente generados y la categoría de $\mathcal{O}_X$-módulos coherentes.*

Demostración. Puesto que $\widetilde{M}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo casi coherente, tenemos por la Proposición 4.1.8, que el funtor $M \mapsto \widetilde{M}$ es un funtor plenamente fiel de la categoría de A-módulos sobre la categoría de $\mathcal{O}_X$-módulos casi coherentes. Además, como X es esquema afín, por la Proposición 4.2.4, dado $\mathcal{F}$ un haz casi coherente, existe un A-módulo M tal que $\mathcal{F} = \widetilde{M}$, de esta manera el funtor $M \mapsto \widetilde{M}$ es esencialmente sobreyectiva, por tanto una equivalencia de categorías. Por otro lado, si A es noetheriano y M un A-módulo finitamente generado, entonces $\widetilde{M}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo coherente y el funtor $M \mapsto \widetilde{M}$ es plenamente fiel de la categoría de A-módulos finitamente generados sobre la categoría de $\mathcal{O}_X$-módulos coherentes. Además, como $X = \operatorname{Spec} A$ es un espacio noetheriano, por la Proposición 4.2.4, dado $\mathcal{F}$ un haz coherente, existe un A-módulo M finitamente generado tal que $\mathcal{F} \cong \widetilde{M}$, de esta manera el funtor $M \mapsto \widetilde{M}$ es esencialmente sobreyectiva, por tanto una equivalencia entre dichas categorías. $\square$

4.3 Más resultados en Haces Coherentes

Proposición 4.3.1. *Sea $X = \operatorname{Spec} A$ un esquema afín y consideremos una sucesión exacta de $\mathcal{O}_X$-módulos $0 \to \mathcal{F}' \overset{\varphi}{\to} \mathcal{F} \overset{\psi}{\to} \mathcal{F}'' \to 0$, en donde $\mathcal{F}'$ es casi coherente. Entonces la sucesión*

$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}') \overset{\varphi(X)}{\to} \Gamma(X, \mathcal{F}) \overset{\psi(X)}{\to} \Gamma(X, \mathcal{F}'') \to 0$$

es exacta.

Demostración. Por el Lema 3.1.20 sabemos que el funtor $\Gamma(X, \cdot)$ es exacto a izquierda, basta probar entonces que $\psi(X)$ es sobreyectiva. Dado $s \in \Gamma(X, \mathcal{F}'')$, como X es casi compacto, es cubierto con un número finito de abiertos básicos $D(g_1), \ldots, D(g_r)$ con $g_i \in A$; y desde que ψ es sobreyectiva, del Lema 3.1.19 se sigue que existe $t_i \in \mathcal{F}(D(g_i))$ tal que $\psi(D(g_i))(t_i) = s\big|_{D(g_i)}$. Sea $f = g_{i_0}$ para un índice i_0 fijo, afirmamos que para algún $n > 0$, $f^n s$ es la imagen de una sección global de $\mathcal{F}$ por la aplicación $\psi(X)$. En efecto, si denotamos $t'_i = t_{i_0}\big|_{D(fg_i)}$ y $t''_i = t_i\big|_{D(fg_i)}$, tendremos que $t'_i, t''_i \in \mathcal{F}(D(fg_i))$ y $\psi(D(fg_i))(t'_i) = s\big|_{D(fg_i)} = \psi(D(fg_i))(t''_i)$, luego $t'_i - t''_i \in \operatorname{Nuc}\big(\psi(D(fg_i))\big) = \operatorname{Im}\big(\varphi(D(fg_i))\big)$; por tanto existe $u_i \in \mathcal{F}'(D(fg_i))$ tal que $t'_i - t''_i = \varphi(D(fg_i))(u_i)$. Como $\mathcal{F}'\big|_{D(g_i)}$ es casi coherente y $D(fg_i)$ es un abierto básico para $D(g_i)$, por la segunda afirmación del Lema 4.2.3 existe $n_i > 0$ tal que $f^{n_i}u_i$ se extiende a una sección $v_i \in \mathcal{F}'(D(g_i))$, más aún, tomando $n = max\{n_1, \ldots, n_r\}$, podemos suponer que $f^n u_i$ se extiende a v_i se para todo $i = 1, .., r$. Luego

$$\varphi(D(g_i))(v_i)\big|_{D(fg_i)} = \varphi(D(fg_i))(v_i\big|_{D(fg_i)}) = \varphi(D(fg_i))(f^n u_i) = f^n(t'_i - t''_i).$$

Sea $\widehat{t_i} = f^n t_i + \varphi(D(g_i))(v_i) \in \mathcal{F}(D(g_i))$, entonces tenemos

$$\widehat{t_i}\big|_{D(fg_i)} = f^n t''_i + \varphi(D(g_i))(v_i)\big|_{D(fg_i)} = f^n t''_i + f^n(t'_i - t''_i) = f^n t'_i = f^n t_{i_0}\big|_{D(fg_i)}.$$

Luego para cada i, j, tenemos $(\widehat{t_i} - \widehat{t_j})\big|_{D(fg_ig_j)} = 0$. Entonces por la primera afirmación del Lema 3.1.19 aplicado al haz casi coherente $\mathcal{F}'\big|_{D(g_ig_j)}$, existe $m_{ij} > 0$ tal que $f^{m_{ij}}(\widehat{t_i} - \widehat{t_j})\big|_{D(g_ig_j)} = 0$. Tomando $m = max\{m_{ij}\}$ tenemos $f^m\widehat{t_i}\big|_{D(g_ig_j)} = f^m\widehat{t_j}\big|_{D(g_ig_j)}$, y como $\mathcal{F}$ es un haz, existe $t \in \mathcal{F}(X)$ tal que $t\big|_{D(g_i)} = f^m\widehat{t_i}\big|_{D(g_i)}$. Entonces

$$\begin{aligned}\psi(X)(t)\big|_{D(g_i)} &= \psi(D(g_i))(t\big|_{D(g_i)}) = \psi(D(g_i))(f^m\widehat{t_i}\big|_{D(g_i)}) \\ &= f^m\psi(D(g_i))(\widehat{t_i}) = f^m f^n s\big|_{D(g_i)}\end{aligned}$$

para cada $i = 1, \ldots, r$, por tanto $\psi(X)(t) = f^{m+n}s$. Esto prueba la afirmación. Ahora bien, como $f = g_{i_0}$ donde i_0 era fijo pero arbitrario, tenemos por la afirmación anterior que para cada $i = 1, .., r$, existe una sección global t_i de $\mathcal{F}$ tal que $\psi(X)(t_i) = g_i^{n_i}s$ para algún $n_i > 0$. Luego tomando $n = max\{n_i\}$ y multiplicando a t_i por una potencia de f, podemos asumir que $\psi(X)(t_i) = g_i^n s$ para todo $i = 1, .., r$. Por otro lado, como los abiertos $D(g_i)$ cubren a X, entonces el ideal $\langle g_1^n, \ldots, g_r^n\rangle$ coincide con A, por tanto $1 = \sum_{i=1}^r a_i g_i^n$, donde $a_i \in A$. Sea la sección global $t_0 = \sum_{i=1}^r a_i t_i$, entonces $\psi(X)(t_0) = \sum_{i=1}^r a_i\psi(X)(t_i) = \sum_{i=1}^r a_i g_i^n s = s$. Con esto terminamos la prueba. □

Proposición 4.3.2. *Sea X un esquema. El núcleo, conúcleo, la imagen y la coimagen de cualquier morfismo de haces casi coherentes son casi coherentes. Si X es noetheriano, lo mismo es verdad para haces coherentes.*

Demostración. Sea $\psi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de haces casi coherentes sobre X. Puesto que X puede ser cubierto por abiertos afines y puesto que el funtor restricción a un abierto U de X es exacto, tenemos que $(\text{Nuc } \psi)|_U = \text{Nuc}(\psi|_U)$, $(\text{Im } \psi)|_U = \text{Im}(\psi|_U)$, lo mismo para el conúcleo y la coimagen; entonces debido al Lema 4.2.1, es suficiente considerar que el esquema X es afín. Considerando la sucesión exacta

$$0 \to \text{Nuc } \psi \to \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{G}$$

y la exactitud a izquierda del funtor $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{F})$, tenemos la sucesión exacta

$$0 \to \text{Nuc } \psi(X) \to \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\psi(X)} \mathcal{G}(X)$$

luego como el funtor $M \mapsto \widetilde{M}$ es exacto y $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ son casi coherentes, tenemos la sucesión exacta

$$0 \to (\text{Nuc } \psi(X))\tilde{} \to \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{G}\,.$$

Así, Nuc $\psi = (\mathrm{Nuc}\ \psi(X))\tilde{}$, y se sigue Nuc ψ es casi coherente. Ahora consideremos la sucesión exacta
$$0 \to \mathrm{Nuc}\ \psi \to \mathcal{F} \to \mathrm{Im}\ \psi \to 0\,.$$
Como Nuc ψ es casi coherente, por la Proposición 4.3.1 tenemos la sucesión exacta
$$0 \to \mathrm{Nuc}\ \psi(X) \to \mathcal{F}(X) \to (\mathrm{Im}\ \psi)(X) \to 0\,,$$
luego la sucesión exacta
$$0 \to \mathrm{Nuc}\ \psi \to \mathcal{F} \to \big((\mathrm{Im}\ \psi)(X)\big)\tilde{} \to 0\,.$$
Por lo cual, Im $\psi = ((\mathrm{Im}\,\psi)(X))\tilde{}$, o sea la imagen de ψ es casi coherente. Asimismo, considerando la sucesiones exactas
$$0 \to \mathrm{Im}\ \psi \to \mathcal{G} \to \mathrm{Conuc}\ \psi \to 0 \qquad \text{y} \qquad 0 \to \mathrm{Nuc}\ \psi \to \mathcal{F} \to \mathrm{Coim}\ \psi \to 0\,,$$
conseguimos que el conúcleo y la coimagen de ψ son casi coherentes.

En el caso X noetheriano y $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ coherentes, tenemos que $\mathcal{O}_X(X)$ es un anillo noetheriano y Nuc $\psi(X)$, (Im ψ)(X) son submódulos finitamente generados de los $\mathcal{O}_X(X)$-módulos finitamente generados $\mathcal{F}(X)$ y $\mathcal{G}(X)$ respectivamente, por tanto se sigue que Nuc ψ y Im ψ son coherentes. □

Proposición 4.3.3. *Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo de esquemas.*

(a) *Si $\mathcal{G}$ es un haz casi coherente de $\mathcal{O}_Y$-módulos, entonces $f^*\mathcal{G}$ es un haz casi coherente de $\mathcal{O}_X$-módulos.*

(b) *Si X e Y son noetherianos, y si $\mathcal{G}$ es coherente, entonces $f^*\mathcal{G}$ es coherente.*

(c) *Supongamos que X es noetheriano, o que f es casi compacto y separado. Entonces si $\mathcal{F}$ es un haz casi coherente de $\mathcal{O}_X$-módulos, tenemos que $f_*\mathcal{F}$ es un haz casi coherente de $\mathcal{O}_Y$-módulos.*

Demostración. (a). Supongamos primero que $X = \mathrm{Spec}\ B$ e $Y = \mathrm{Spec}\ A$ son esquemas afines. Como $\mathcal{G}$ es casi coherente, tenemos que $\mathcal{G} = \widetilde{M}$, donde M es un A-módulo; luego debido a la Proposición 4.1.8, $f^*\mathcal{G} = f^*(\widetilde{M}) \cong (M \otimes_A B)\tilde{}$, por tanto $f^*\mathcal{G}$ es casi coherente debido al Corolario 4.2.5. Veamos ahora el caso general; fijemos un punto arbitrario $p \in X$, como $\mathcal{G}$ es casi coherente, existe un subconjunto abierto afín $V \subseteq Y$ tal que $f(p) \in \mathcal{G}\big|_V \cong \widetilde{M}$, donde M es un $\mathcal{O}_Y(V)$-módulo, puesto que $f^{-1}(V)$ es un abierto de X conteniendo a p, podemos tomar un subconjunto abierto afín U de X tal que $p \in U \subseteq f^{-1}(V)$; así, podemos considerar la restricción de f sobre U, $f\big|_U\colon U \to V$. Por el argumento inicial y desde que $(f^*\mathcal{G})\big|_U \cong (f\big|_U)^*(\mathcal{G}\big|_V)$, entonces $(f^*\mathcal{G})\big|_U$ es casi coherente, siendo U un abierto afín conteniendo al punto p; de esta manera, $f^*\mathcal{G}$ es casi coherente debido a la Proposición 4.2.4.

(b). Como en la primera parte es suficiente considerar $X = \mathrm{Spec}\ B$ e $Y = \mathrm{Spec}\ A$, y desde que X e Y son esquemas noetherianos, A y B son anillos noetherianos. Ahora bien, $\mathcal{G}$ es coherente, tenemos que $\mathcal{G} \cong \widetilde{M}$, donde M es un A-módulo finitamente generado. Luego $f^*\mathcal{G}$ es coherente, ya que $f^*\mathcal{G} \cong (M \otimes_A B)\tilde{}$ y $M \otimes_A B$ es un B-módulo finitamente generado.

(c). Debido al Lema 4.2.1, podemos considerar a Y como esquema afín. Ahora bien, si f es casi compacto y separado, tendremos que $X = f^{-1}(Y)$ es cubierto por un número finito de abiertos afines U_i tal que $U_i \cap U_j$ es afín; y en el caso en que X es casi compacto, entonces podemos cubrir a X con un número finito de abiertos afines U_i tal que $U_i \cap U_j$ es unión finita de abiertos afines. Denotemos a $U_i \cap U_j$ por U_{ij}.

Supongamos primeramente que los U_{ij} son afines. Por simplicidad escribimos $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}\big|_{U_i}$, $\mathcal{F}_{ij} = \mathcal{F}\big|_{U_{ij}}$, también $\mathcal{F}'_i = (f_i)_*\mathcal{F}_i$ y $\mathcal{F}'_{ij} = (f_{ij})_*\mathcal{F}_{ij}$, donde f_i y f_{ij} son las restricciones de f a U_i y U_{ij}, respectivamente. De acuerdo a la afirmación (d) en la Proposición 4.1.8, tanto $\mathcal{F}'_i$ como $\mathcal{F}'_{ij}$ son isomorfos a haces asociados a un módulo, luego por la afirmación (c) en la Proposición 4.1.8 los haces $\bigoplus_i \mathcal{F}'_i$ y $\bigoplus_{ij} \mathcal{F}'_{ij}$ son $\mathcal{O}_Y$-módulos casi coherentes. Para ver que $f_*\mathcal{F}$ es casi coherente definiremos un morfismo $\psi\colon \bigoplus_i \mathcal{F}'_i \to \bigoplus_{ij} \mathcal{F}'_{ij}$ tal que $f_*\mathcal{F}$ es isomorfo al núcleo de ψ, que es casi coherente por la proposición anterior. Para cada subconjunto abierto $W \subseteq Y$, definimos

$$\psi(W)\colon \bigoplus_i \mathcal{F}(f^{-1}(W) \cap U_i) \to \bigoplus_{ij} \mathcal{F}(f^{-1}(W) \cap U_{ij})$$

dado por $(s_i) \mapsto (s_{i|j} - s_{j|i})$, donde $s_{i|j}$ denota la restricción de s_i sobre $f^{-1}(W) \cap U_{ij}$: es inmediato verificar que ψ es en realidad un morfismo. Para probar que $\mathrm{Nuc}(\psi)$ es isomorfo a $f_*\mathcal{F}$, definimos un morfismo de $f_*\mathcal{F}$ en $\mathrm{Nuc}(\psi)$ mediante los homomorfismos $\mathcal{F}(f^{-1}(W)) \to \mathrm{Nuc}(\psi(W))$ dado por $s \mapsto (s_i)$, donde s_i denota la restricción de s sobre $f^{-1}(W) \cap U_i$; luego, resulta que estos homomorfismos son isomorfismos, este hecho es consecuencia de la propiedad de haz.

Para el caso en que U_{ij} es unión finita de abiertos afines, digamos por abiertos U_{ijk}, usamos la misma idea de antes. Denotamos f_{ijk} a la restricción de f en U_{ijk}, $\mathcal{F}_{ijk}$ a la restricción de $\mathcal{F}$ sobre U_{ijk} y $\mathcal{F}'_{ijk}$ al haz $(f_{ijk})_*\mathcal{F}_{ijk}$. Luego, argumentando como antes llegamos a que el haz de $\mathcal{O}_Y$-módulos $\bigoplus_{ijk} \mathcal{F}'_{ijk}$ es casi coherente. Definimos para este caso un morfismo $\psi'\colon \bigoplus_{ij} \mathcal{F}'_{ij} \to \bigoplus_{ijk} \mathcal{F}'_{ijk}$, definiendo en cada abierto $W \subseteq Y$, como

$$\psi'(W)\colon \bigoplus_i \mathcal{F}(f^{-1}(W) \cap U_i) \to \bigoplus_{ijk} \mathcal{F}(f^{-1}(W) \cap U_{ijk})$$

dado por $(s_i) \mapsto (s_{i|j|k} - s_{j|i|k})$, donde $s_{i|j|k}$ denota la restricción de $s_{i|j}$ sobre $f^{-1}(W) \cap U_{ijk}$. Resultará de manera similar que $f_*\mathcal{F}$ es isomorfo al núcleo de ψ', con esto termina la prueba. □

Proposición 4.3.4. *Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(a) *Si f es una inmersión cerrada, entonces es un morfismo finito.*

(b) *Si f es un morfismo finito de esquemas noetherianos y $\mathcal{F}$ es un haz coherente sobre X, entonces $f_*\mathcal{F}$ es un haz coherente sobre Y.*

Demostración. (a). Sea $f\colon X \to Y$ una inmersión cerrada, tomemos un abierto afín $U = \operatorname{Spec} A$ y $V = f^{-1}(U)$. Como $f(X)$ es cerrado en Y entonces, entonces $f(V) = U \cap f(X)$ es cerrado en U, y por el Corolario 4.3.8, $f(V) \cong \operatorname{Spec} A/I$ para algún ideal I de A. Puesto que $f_V := f|_V\colon V \to f(V)$ es un homeomorfismo, V es un esquema afín, digamos $V = \operatorname{Spec} B$. Por otro lado, puesto que $f^\sharp$ es sobreyectiva, el morfismo

$f_V^\sharp\colon \mathcal{O}_{f(V)} \to (f_V)_*(\mathcal{O}_V)$ es sobreyectiva (para ello basta verificar la sobreyectividad en los tallos y usar la Proposición 3.1.18), entonces, por el ítem (b) del Lema 3.2.5 el homomorfismo $A/I \to B$ correspondiente al morfismo f_V es sobreyectiva, luego tenemos un homomorfismo sobreyectivo $\varphi\colon A \to B$. De esta manera obtenemos que B es un A-módulo finitamente generado, ya que tiene como generador al elemento $\varphi(1)$, por tanto f es finito.

(b). Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo finito y sea $\mathcal{F}$ es un haz coherente sobre X. Tomemos un abierto afín $U = \operatorname{Spec} A$ de Y, entonces puesto que f es finito, $f^{-1}(U) = \operatorname{Spec} B$ para algún A-módulo B finitamente generado. Puesto que $\mathcal{F}$ es coherente, tenemos $\mathcal{F}|_{f^{-1}(U)} = \tilde{M}$, donde M es un B-módulo finitamente generado. Por otra tomando $W = f^{-1}(U)$, tenemos

$$f_*(\mathcal{F})|_U = (f_W)_*\mathcal{F}|_W = (f_W)_*\tilde{M} = ({}_AM)\tilde{},$$

donde la última igualdad se debe a la Proposición 4.1.8. Ahora bien, como M es módulo finito sobre B, y B es módulo finito sobre A, tenemos que ${}_AM$ es módulo finito sobre A, luego por la Proposición 4.2.4 se sigue que $f_*(\mathcal{F})$ es coherente. □

Lema 4.3.5. *Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado y sea $\mathcal{J}$ un haz de ideales sobre X, entonces $Sop(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}) = \{p \in X \mid \mathcal{J}_p \neq \mathcal{O}_{X,p}\}$ es un subconjunto cerrado de X.*

Demostración. Sea $Y = Sop(\mathcal{O}_X/\mathcal{J})$. Veamos que $X\backslash Y$ es abierto, dado $\mathfrak{p} \in X\backslash Y$, tenemos que $\mathcal{J}_p = \mathcal{O}_{X,p}$, entonces para el elemento unidad $\langle X, 1\rangle \in \mathcal{O}_{X,p}$ existe un entorno U de p y una sección $s \in \mathcal{J}(U)$ tal que $\langle U, s\rangle = \langle X, 1\rangle$, luego existe un entorno V de p tal que $V \subseteq U$ y $s|_V = 1 \in \mathcal{O}_X(V)$. Afirmamos que $V \subseteq X\backslash Y$, en efecto, si $q \in V$ tenemos que $\langle X, 1\rangle \in \mathcal{O}_{X,q}$ y $\langle X, 1\rangle = \langle V, s|_V\rangle \in \mathcal{J}_q$, esto implica que $\mathcal{J}_q = \mathcal{O}_{X,q}$, es decir $q \in X\backslash Y$. □

Lema 4.3.6. *Sea $X = \operatorname{Spec} A$ un esquema afín, $\mathcal{J}$ un haz de ideales casi coherente sobre X y sea Y el soporte del haz $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}$. Si $\mathcal{O}_Y$ es la restricción del haz $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}$ a Y, entonces $(Y, \mathcal{O}_Y)$ es un esquema afín.*

Demostración. Por el Corolario 4.2.5 tenemos que $\mathcal{J} = \tilde{I}$ donde I es un ideal de A, por el Lema 4.3.5, Y es un subconjunto cerrado de X, además es inmediato verificar que $Y = V(I)$. Entonces tenemos $Y \cong \operatorname{Spec} A/I$ y $\mathcal{O}_Y = (\mathcal{O}_X/\mathcal{J})|_Y = (\tilde{A}/\tilde{I})|_Y \cong (A/I)\tilde{}$, de esta manera $(Y, \mathcal{O}_Y)$ es un esquema afín. □

Definición 4.3.1. Sea Y un subesquema cerrado de un esquema X, y sea $i\colon Y \to X$ el morfismo inclusión. Definimos el *haz ideal* de Y, denotado por $\mathcal{J}_Y$, como el núcleo del morfismo $i^\sharp\colon \mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_Y$.

Proposición 4.3.7 (subesquemas cerrados y haces de ideales)**.** *Sea X un esquema, y sea Y un subesquema cerrado de X. Entonces $\mathcal{J}_Y$ es un haz ideal casi coherente sobre X, y la correspondencia $Y \mapsto \mathcal{J}_Y$ establece una biyección entre subesquemas cerrados de X y haces de ideales casi coherentes sobre X.*

Demostración. Sea Y un subesquema cerrado de X y sea $(i, i^\sharp)\colon Y \to X$ su morfismo asociado, donde i es la inclusión . Veamos ahora que i es casi compacto y separado. En efecto, i es casi compacto ya que para todo abierto afín V de X, el conjunto $i^{-1}(V) = V \cap Y$ es casi compacto, pues Y es un cerrado de X y V es casi compacto. Por otro lado, Y junto con las identidades de Y, satisfacen trivialmente la propiedad universal del producto fibrado de Y por Y sobre X(ver definición 3.4.6), de donde se tiene que el morfismo diagonal $\triangle\colon Y \to Y \times_X Y$ es un isomorfismo, en particular, es una inmersión cerrada, de esta manera i es un morfismo separado. Entonces por la Proposición 4.3.3, $i_*(\mathcal{O}_Y)$ es casi coherente, luego $i^\sharp$ es un morfismo de haces coherentes, y por la Proposición 4.3.2, $\mathcal{J}_Y = \operatorname{Nuc}(i^\sharp)$ es casi coherente.

Por otro lado, sea $\mathcal{J}$ un haz de ideales casi coherente sobre X, definimos Y como el soporte del haz $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}$, que es un subconjunto cerrado de X debido al Lema 4.3.5, definimos el haz estructural de Y como el haz $\mathcal{O}_Y := (\mathcal{O}_X/\mathcal{J})|_Y$. Sea $i\colon Y \to X$ la aplicación inclusión, entonces de la Proposición 3.1.24, tenemos un morfismo canónico

$$\psi\colon \mathcal{O}_X/\mathcal{J} \to i_*i^{-1}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}) = i_*\mathcal{O}_Y\,.$$

Este morfismo es un isomorfismo, se puede chequear el isomorfismo en los tallos. Finalmente definimos el morfismo $i^\sharp\colon \mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_Y$ como la composición del morfismo canónico $\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X/\mathcal{J}$ y el isomorfismo ψ, de esta manera $i^\sharp$ es un morfismo sobreyectivo. Para ver que $(Y, \mathcal{O}_Y)$ es un subesquema cerrado de X resta verificar que $(Y, \mathcal{O}_Y)$ es un esquema, en efecto, para cualquier abierto afín V de X se sigue del Lema 3.1.3 que $Y \cap V$ es el soporte del haz $\mathcal{O}_V/\mathcal{J}|_V$, y por el Lema 4.3.6, el espacio anillado $(Y \cap V, \mathcal{O}_{Y\cap V})$ es un esquema afín, donde $\mathcal{O}_{Y\cap V} = (\mathcal{O}_V/\mathcal{J}|_V)|_{Y\cap V}$, y es inmediato verificar que $\mathcal{O}_{Y\cap V} = \mathcal{O}_Y|_{Y\cap V}$, por tanto Y es un esquema. Por otro lado, el haz ideal $\mathcal{J}_Y$ de Y es isomorfo a $\mathcal{J}$, en efecto, esto se sigue del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{J} \arrow[r] \arrow[d, dashed, Rightarrow] & \mathcal{O}_X \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow, "\mathrm{id}"] & \mathcal{O}_X/\mathcal{J} \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow, "\psi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{J}_Y \arrow[r] & \mathcal{O}_X \arrow[r, "i^\sharp"'] & i_*\mathcal{O}_Y \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Para concluir la prueba, mostremos lo siguiente: si Y junto con el morfismo $i\colon Y \to X$ es un subesquema cerrado de X y Z es el subesquema cerrado inducido por $\mathcal{J}_Y$, entonces Z es isomorfo a Y. En efecto, como la sucesión

$$0 \to \mathcal{J}_Y \to \mathcal{O}_X \overset{i^\sharp}{\to} i_*\mathcal{O}_Y \to 0$$

es exacta, entonces la sucesión

$$0 \to \mathcal{J}_{Y,\mathfrak{p}} \to \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \to (i_*\mathcal{O}_Y)_\mathfrak{p} \to 0$$

es exacta para todo $\mathfrak{p} \in X$, de donde

$$(i_*\mathcal{O}_Y)_\mathfrak{p} \cong \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}/\mathcal{J}_{Y,\mathfrak{p}}\,. \tag{4.3.2}$$

Además, si $\mathfrak{p} \in X$ tenemos

$$(i_*\mathcal{O}_Y)_\mathfrak{p} = \begin{cases} \mathcal{O}_{Y,\mathfrak{p}}\,, & \text{si} \quad \mathfrak{p} \in Y\,, \\ 0\,, & \text{si} \quad \mathfrak{p} \in X\backslash Y\,. \end{cases}$$

Luego, como Z es el soporte de $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}_Y$ y $\mathcal{O}_{Y,\mathfrak{p}} \neq 0$ (ya que es un anillo local), el isomorfismo (4.3.2) implica que $Z = Y$.

Por otra parte, de la Proposición 3.1.24, existe un morfismo canónico $\varphi\colon i^{-1}(i_*\mathcal{O}_Y) \to \mathcal{O}_Y$, este morfismo es un isomorfismo ya que lo es en los tallos, si $\mathfrak{p} \in Y$ tenemos

$$(i^{-1}(i_*\mathcal{O}_Y))_{\mathfrak{p}} \cong (i_*\mathcal{O}_Y)_{\mathfrak{p}} \cong \mathcal{O}_{Y,\mathfrak{p}}\,.$$

Además, puesto que $i^\sharp$ es sobreyectiva, entonces $i_*\mathcal{O}_Y \cong \mathcal{O}_X/\mathcal{J}_Y$, luego

$$\mathcal{O}_Z \cong (\mathcal{O}_X/\mathcal{J}_Y)|_Y \cong i^{-1}(i_*\mathcal{O}_Y) \cong \mathcal{O}_Y\,,$$

por tanto, Z es isomorfo a Y como esquemas. □

Corolario 4.3.8. *Si $X = \operatorname{Spec} A$ es un esquema afín, entonces existe una correspondencia biunívoca entre ideales $\mathfrak{a}$ de A y subesquemas cerrados Y de X, dado por $\mathfrak{a} \mapsto V(\mathfrak{a}) \subseteq X$. En particular, todo subesquema cerrado de un esquema afín es afín.*

Demostración. Por el Corolario 4.2.5, los haces de ideales casi coherentes sobre X están en correspondencia biunívoca con los ideales de A, y por la Proposición 4.3.7 los haces de ideales casi coherentes sobre X están en correspondencia biunívoca con los subesquemas cerrados de X, y se sigue la afirmación. □

Definición 4.3.2. Sea X un esquema , $\mathcal{L}$ un haz inversible en X y $f \in \Gamma(X, \mathcal{L})$. Definimos el conjunto X_f como el conjunto de puntos $x \in X$ tal que $f_x \notin \mathfrak{m}_x\mathcal{L}_x$, donde $\mathfrak{m}_x$ es el ideal maximal del anillo local $\mathcal{O}_{X,x}$.

Lema 4.3.9. *Sea X un esquema, $\mathcal{L}$ un haz inversible en X, sea $f \in \Gamma(X, \mathcal{L})$, sea $U = \operatorname{Spec} A$ un abierto afín de X tal que $\mathcal{L}|_U$ sea libre, entonces $X_f \cap U = D(g)$, donde g es el elemento de A que se identifica con $f|_U$. Consecuentemente, el conjunto X_f es abierto en X.*

Demostración. Puesto que $\mathcal{L}$ es inversible y $\mathcal{L}|_U$ es libre entonces $\mathcal{L}|_U \cong \mathcal{O}_X|_U$, luego $\mathcal{L}(U) \cong A$ y $f|_U$ se corresponde con un elemento g de A vía este isomorfismo. Dado $\mathfrak{p} \in X_f \cap U$ tenemos $\mathcal{L}_{\mathfrak{p}} \cong (\mathcal{O}_X|_U)_{\mathfrak{p}} \cong A_{\mathfrak{p}}$, además $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \cong A_{\mathfrak{p}}$, luego $\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ asimismo tenemos $\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}\mathcal{L}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$. Debido al diagrama natural

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}(U) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d] & A \arrow[d] \\
\mathcal{L}_{\mathfrak{p}} \arrow[r, Rightarrow] & A_{\mathfrak{p}}
\end{tikzcd}$$

podemos identificar el germen $f_{\mathfrak{p}}$ con el elemento $\frac{g}{1}$ de $A_{\mathfrak{p}}$; de esta manera $X_f \cap U$ es el conjunto de primos $\mathfrak{p} \in U$ tal que $\frac{g}{1} \neq \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$, luego de las propiedades elementales de anillo local, es inmediato verificar que dicho conjunto es $D(g)$.

Po otro lado, de la definición de haz inversible conseguimos un cubrimiento abierto $\{U_i\}_{i\in I}$ de X tal que $\mathcal{L}|_{U_i}$ es libre, así por lo anterior $X_f \cap U_i$ es un abierto de U_i, luego un abierto de X, esto implica que X_f es abierto en X. □

Proposición 4.3.10. *Sea X un esquema, $\mathcal{L}$ un haz inversible en X, $f \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ y sea $\mathcal{F}$ un haz casi coherente sobre X. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(a) *Si X es casi compacto y $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ es una sección global de $\mathcal{F}$ cuya restricción a X_f es 0, entonces para algún $n > 0$ tenemos $f^{\otimes n} \otimes s = 0$, donde $f^{\otimes n} \otimes s$ es considerado como una sección global de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$.*

(b) *Supongamos que X está cubierto por un número finito de abiertos afines U_i, tal que $\mathcal{L}\big|_{U_i}$ es libre para cada i, y tal que $U_i \cap U_j$ es casi compacto para cada i, j. Dada una sección $t \in \Gamma(X_f, \mathcal{F})$, para algún $n > 0$, entonces la sección $f^{\otimes n} \otimes t \in \Gamma(X_f, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$ se extiende a una sección global de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$.*

Demostración. Puesto $\mathcal{L}$ es inversible y X es casi compacto, podemos cubrir a X con un número finito de subconjuntos abiertos afines $U_i = \operatorname{Spec} A_i$ tal que $\mathcal{L}|_{U_i} \cong \mathcal{O}_X|_{U_i}$ para todo i. Por el Lema 4.3.9, para cada i, el conjunto abierto $X_f \cap U_i$ coincide con el abierto básico $D(g_i)$ de U_i, donde $g_i \in A_i$ está identificado con el elemento $f|_{U_i}$ de $\mathcal{L}(U_i)$ por el isomorfismo $\mathcal{L}(U_i) \cong \mathcal{O}_X(U_i) = A_i$.

(a). De la hipótesis $s|_{X_f} = 0$, tenemos $s|_{X_f \cap U_i} = 0$ para todo i, del Lema 4.2.3, existe entero $n_i \geq 1$ tal que $(f|_{U_i})^n s|_{U_i} = 0$; tomando $n = max\{n_i\}$, tenemos $(f|_{U_i})^n s|_{U_i} = 0$ para todo i. Por otro lado, puesto que $\mathcal{L}^{\otimes n} \otimes \mathcal{F}$ es el haz asociado al prehaz $U \mapsto \mathcal{L}(U)^{\otimes n} \otimes \mathcal{F}(U)$, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(X)^{\otimes n} \otimes \mathcal{F}(X) & \longrightarrow & \mathcal{L}^{\otimes n} \otimes \mathcal{F}(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{L}(U_i)^{\otimes n} \otimes \mathcal{F}(U_i) & \longrightarrow & \mathcal{L}^{\otimes n} \otimes \mathcal{F}(U_i) \end{array}$$

donde las flechas verticales son las correspondientes restricciones. Consideremos el elemento $f^{\otimes n} \otimes s \in \mathcal{L}(X)^{\otimes n} \otimes \mathcal{F}(X)$, tenemos $(f^{\otimes n} \otimes s)|_{U_i} = (f|_{U_i})^{\otimes n} \otimes s|_{U_i}$, donde este último elemento se identifica con $(f|_{U_i})^n s|_{U_i} = 0$ por el isomorfismo $\mathcal{L}(U_i)^{\otimes n} \otimes \mathcal{F}(U_i) \cong \mathcal{F}(U_i)$, de esta manera tenemos $(f^{\otimes n} \otimes s)|_{U_i} = 0$ para cada i; del diagrama anterior podemos considerar a $f^{\otimes n} \otimes s$ como una sección global de $\mathcal{L}^{\otimes n} \otimes \mathcal{F}$ tal que restringido a cada U_i es cero; por tanto tenemos $f^{\otimes n} \otimes s = 0$ como sección global de $\mathcal{L}^{\otimes n} \otimes \mathcal{F}$.

(b). Para cada i, tenemos $\mathcal{L}|_{U_i} \cong \mathcal{O}_X|_{U_i}$. Dado $t \in \Gamma(X_f, \mathcal{F})$, para cada i, denotemos t_i a la restricción de t sobre $X_f \cap U_i$. Como $X_f \cap U_i = D(g_i)$, donde $g_i \in A_i$ es el elemento que se identifica con $f|_{U_i} \in \mathcal{L}(U_i)$, la Proposición 4.2.3 nos asegura que existe n (que depende de i) tal que $g_i^n t_i$ se extiende a una sección de $\mathcal{F}$ sobre U_i, es decir, existe $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tal que $s_i|_{X_f \cap U_i} = g_i^n t_i$, puesto que hay una cantidad finita de abiertos U_i podemos conseguir que n no dependa de i. Del isomorfismo $\mathcal{L}|_{U_i} \cong \mathcal{O}_X|_{U_i}$, obtenemos el isomorfismo $\mathcal{L}(X_f \cap U_i) \cong \mathcal{O}_X(X_f \cap U_i)$, luego

$$\mathcal{L}(X_f \cap U_i)^{\otimes n} \otimes \mathcal{F}(X_f \cap U_i) \cong \mathcal{F}(X_f \cap U_i)\,.$$

De esta manera $g_i^n t_i$ se identifica con $(f|_{X_f \cap U_i})^{\otimes n} \otimes t|_{X_f \cap U_i}$ por medio de este último isomorfismo. Entonces

$$s_i|_{X_f \cap U_i} = g_i^n t_i = (f|_{X_f \cap U_i})^{\otimes n} \otimes t|_{X_f \cap U_i} = (f^{\otimes n} \otimes t)|_{X_f \cap U_i}\,, \tag{4.3.3}$$

luego $s_i|_{X_f \cap U_i \cap U_j} = s_j|_{X_f \cap U_i \cap U_j}$, y por tanto $(s_i|_{U_i \cap U_j} - s_j|_{U_i \cap U_j})|_{X_f \cap U_i \cap U_j} = 0$.

Si denotamos $f_{ij} := f|_{U_i \cap U_j}$, el conjunto $X_{f_{ij}} \subseteq U_i \cap U_j$ coincide con el conjunto $X_f \cap U_i \cap U_j$, esto se sigue desde que $(\mathcal{O}_X|_{U_i \cap U_j})_{\mathfrak{p}} \cong \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}$, $(\mathcal{L}|_{U_i \cap U_j})_{\mathfrak{p}} \cong \mathcal{L}_{\mathfrak{p}}$ y $(f_{ij})_{\mathfrak{p}} = f_{\mathfrak{p}}$ para $\mathfrak{p} \in U_i \cap U_j$. Ahora bien, puesto que $\mathcal{F}|_{U_i \cap U_j}$ es casi coherente y $\mathcal{L}|_{U_i \cap U_j}$ es inversible con $U_i \cap U_j$ casi compacto, aplicando (a) podemos tomar un entero grande m tal que

$$f_{ij}^{\otimes m} \otimes (s_i|_{U_i \cap U_j} - s_j|_{U_i \cap U_j}) = 0$$

para todo i, j; o sea $f_{ij}^{\otimes m} \otimes s_i|_{U_i \cap U_j} = f_{ij}^{\otimes m} \otimes s_i|_{U_i \cap U_j}$, para todo i, j. Luego tenemos

$$\big((f|_{U_i})^{\otimes m} \otimes s_i\big)|_{U_i \cap U_j} = f_{ij}^{\otimes m} \otimes s_i|_{U_i \cap U_j} = f_{ij}^{\otimes m} \otimes s_j|_{U_i \cap U_j} = \big((f|_{U_j})^{\otimes m} \otimes s_j\big)|_{U_i \cap U_j}$$

para todo i, j. Por tanto por la propiedad de haz, existe una sección global s de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes(n+m)}$ tal que $s|_{U_i} = (f|_{U_i})^{\otimes m} \otimes s_i$. Luego usando la ecuación (4.3.3), tenemos

$$s|_{X_f \cap U_i} = \big((f|_{U_i})^{\otimes m} \otimes s_i\big)|_{X_f \cap U_i} = (f^{\otimes m} \otimes f^{\otimes n} \otimes t)|_{X_f \cap U_i} = (f^{\otimes(m+n)} \otimes t)|_{X_f \cap U_i}$$

para todo i. Por tanto $s|_{X_f} = f^{\otimes(m+n)} \otimes t$. □

4.4 Correspondencia Proyectiva de Serre

Esta sección es un paralelo a la sección 3.2 donde se estableció la "correspondencia afín de Serre" entre haces coherentes sobre un esquema afín y módulos de tipo finito sobre un anillo noetheriano. En esta sección mostraremos la "correspondencia proyectiva de Serre" entre haces coherentes sobre un esquema proyectivo y módulos graduados de tipo casi finito, como hemos comentado en la introducción.

Definición 4.4.1 (Haz asociado a un módulo graduado)**.** Sea S un anillo graduado y M un S-módulo graduado. Definimos el *haz asociado* a M sobre $X = \operatorname{Proj} S$, denotado por $\widetilde{M}$ como sigue: para cada $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} S$ sea el anillo local $S_{(\mathfrak{p})}$ y el $S_{(\mathfrak{p})}$-módulo $M_{(\mathfrak{p})}$; dado cualquier subconjunto abierto $U \subseteq \operatorname{Proj} S$, definimos $\widetilde{M}(U)$ como el conjunto de todas las funciones $s\colon U \to \bigsqcup_{\mathfrak{p} \in U} M_{(\mathfrak{p})}$ con $s(\mathfrak{p}) \in M_{(\mathfrak{p})}$ para cada $\mathfrak{p}$, los cuales son *localmente cocientes*; es decir, dado $\mathfrak{p} \in U$, existe un entorno abierto V de $\mathfrak{p}$ con $V \subseteq U$ y elementos $m \in M$, $f \in S$ del mismo grado tal que para todo $\mathfrak{q} \in V$ tenemos que $f \notin \mathfrak{q}$ y $s(\mathfrak{q}) = m/f$ en $M_{(\mathfrak{q})}$. Para cada $\mathfrak{p} \in U$ y $s_1, s_2 \in \widetilde{M}(U)$, la fórmula

$$(s_1 + s_2)(\mathfrak{p}) = s_1(\mathfrak{p}) + s_2(\mathfrak{p})$$

convierte a $\widetilde{M}(U)$ en un grupo abeliano.

Proposición 4.4.1. *Sea S un anillo graduado, M un S-módulo graduado y sea $\widetilde{M}$ el haz asociado a M sobre $X = \operatorname{Proj} S$. Se cumplen:*

(a) *$\widetilde{M}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo.*

(b) *Para cada $\mathfrak{p} \in X$, el tallo $(\widetilde{M})_{\mathfrak{p}} \cong M_{(\mathfrak{p})}$.*

(c) *Para cada elemento homogéneo $f \in S_+$, se tiene $\widetilde{M}\big|_{D_+(f)} \cong (M_{(f)})\widetilde{\ }$.*

(d) *$\widetilde{M}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo casi coherente. Además, si S es noetheriano y M es finitamente generado, entonces $\widetilde{M}$ es coherente.*

Demostración. (a) En esta parte solo hay que imitar el argumento de la primera afirmación en la Proposición 4.1.7.

(b) Dado un punto $\mathfrak{p} \in X$, definimos la aplicación $(\widetilde{M})_{\mathfrak{p}} \to M_{(\mathfrak{p})}$ dado por $\langle U, s\rangle \mapsto s(\mathfrak{p})$; la prueba de este isomorfismo es similar a la primera afirmación de la Proposición 3.2.6.

(c) Consideremos el homeomorfismo $\varphi\colon D_+(f) \to \operatorname{Spec} S_{(f)}$ de la segunda afirmación en la Proposición 3.2.6, dado por $\mathfrak{p} \to \mathfrak{p}S_f \cap S_{(f)}$. Para cada $\mathfrak{p} \in D_+(f)$ el homomorfismo $\psi_{\mathfrak{p}}\colon (M_{(f)})_{\varphi(\mathfrak{p})} \to M_{(\mathfrak{p})}$ definido por $\frac{m/f^r}{h/f^s} \mapsto \frac{f^s m}{f^r h}$ es un isomorfismo, con inverso $\phi_{\mathfrak{p}}\colon M_{(\mathfrak{p})} \to (M_{(f)})_{\varphi(\mathfrak{p})}$ dado por $\frac{m}{h} \mapsto \frac{(h^{d-1}m)/f^e}{h^d/f^e}$ donde $d = \partial(f)$ y $e = \partial(m) = \partial(h)$. Ahora bien, para un abierto $U \subseteq D_+(f)$ definimos $\xi(U)\colon \widetilde{M}\big|_{D_+(f)}(U) \to (M_{(f)})\tilde{}(U)$ por $\xi(U)(s)(\mathfrak{p}) = \phi_{\mathfrak{p}}(s(\varphi(\mathfrak{p})))$. No hay dificultad en ver que ξ está bien definida y es un isomorfismo de haces.

(d) El hecho que $\widetilde{M}$ es casi coherente resulta inmediato de (c). Finalmente, si S es noetheriano y M es finitamente generado, entonces $S_{(f)}$ es un anillo noetheriano y $M_{(f)}$ es finitamente generado como $S_{(f)}$-módulo; de acuerdo a la Proposición 4.2.4 el haz $\widetilde{M}$ es coherente. ☐

Observación 4.4.1. La correspondencia $\tilde{\cdot}$ es un funtor covariante exacto de la categoría S**ModGr** en la categoría $\mathfrak{Mod}(X)$. En efecto, sea $\varphi\colon M \to N$ un homomorfismo de S-módulos graduados y definimos el morfismo de haces $\widetilde{\varphi}\colon \widetilde{M} \to \widetilde{N}$ como $\widetilde{\varphi}(U)(s)(\mathfrak{p}) = \varphi_{(\mathfrak{p})}(s(\mathfrak{p}))$ para todo $\mathfrak{p} \in U$ y $s \in \widetilde{M}(U)$, siendo $\varphi_{(\mathfrak{p})}\colon M_{(\mathfrak{p})} \to N_{(\mathfrak{p})}$ el homomorfismo definido por $\frac{m}{\lambda} \mapsto \frac{\varphi(m)}{\lambda}$. Sean ahora $\varphi\colon M \to N$ y $\psi\colon N \to L$ dos homomorfismos de S-módulos graduados; para cada punto $\mathfrak{p} \in X$, la correspondencia $M \mapsto M_{(\mathfrak{p})}$ es un funtor covariante de la categoría de S-módulos graduados a la categoría de $S_{(\mathfrak{p})}$-módulos, de esto se cumple naturalmente que $(\psi \circ \varphi)\tilde{} = \widetilde{\psi} \circ \widetilde{\varphi}$; en efecto, tomemos un subconjunto abierto U de X, $s \in \widetilde{M}(U)$ y $\mathfrak{p} \in U$, entonces

$$\begin{aligned}(\psi \circ \varphi)\tilde{}(U)(s)(\mathfrak{p}) &= (\psi \circ \varphi)_{(\mathfrak{p})}(s(\mathfrak{p})) = \psi_{(\mathfrak{p})}(\varphi_{(\mathfrak{p})}(s(\mathfrak{p})))\\ &= \psi_{(\mathfrak{p})}(\widetilde{\varphi}(U)(s)(\mathfrak{p})) = \widetilde{\psi}(U) \circ \widetilde{\varphi}(U)(s)(\mathfrak{p})\\ &= (\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\varphi})(U)(s)(\mathfrak{p}).\end{aligned}$$

También, si id_M es la identidad de M, tenemos

$$\widetilde{id_M}(U)(s)(\mathfrak{p}) = (id_M)_{(\mathfrak{p})}(s(\mathfrak{p})) = s(\mathfrak{p}) = id_{\widetilde{M}}(U)(s)(\mathfrak{p})$$

por tanto $\widetilde{id_M} = id_{\widetilde{M}}$, por tanto $\tilde{\cdot}$ es un funtor covariante.

Tomemos ahora la siguiente sucesión exacta de S-módulos graduados

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} L \longrightarrow 0$$

Puesto que $\tilde{\cdot}$ es covariante, tenemos la sucesión de morfismos de haces

$$0 \longrightarrow \widetilde{M} \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} \widetilde{N} \xrightarrow{\widetilde{\psi}} \widetilde{L} \longrightarrow 0 \tag{4.4.4}$$

Luego para todo $\mathfrak{p} \in X$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (\widetilde{M})_{\mathfrak{p}} \arrow[r, "\widetilde{\varphi}_{\mathfrak{p}}"] \arrow[d, Rightarrow, no head] & (\widetilde{N})_{\mathfrak{p}} \arrow[r, "\widetilde{\psi}_{\mathfrak{p}}"] \arrow[d, Rightarrow, no head] & (\widetilde{L})_{\mathfrak{p}} \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow, no head] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_{(\mathfrak{p})} \arrow[r, "\varphi_{(\mathfrak{p})}"] & N_{(\mathfrak{p})} \arrow[r, "\psi_{(\mathfrak{p})}"] & L_{(\mathfrak{p})} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

y por el Lema 2.2.7, la segunda fila del diagrama es exacta para cada $\mathfrak{p} \in X$. De acuerdo a la Proposición 3.1.18 obtenemos que la sucesión (4.4.4) es exacta.

Lema 4.4.2. *Sea S un anillo graduado, $X = \operatorname{Proj} S$ y sean M, N dos S-módulos graduados. Entonces existe un morfismo de haces $\lambda\colon \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{N} \to (M \otimes_S N)\tilde{}$; mas aún, si S es generado por S_1 como S_0-álgebra, entonces λ es un isomorfismo.*

Demostración. Dado $f \in S$ homogéneo de grado positivo, definimos el homomorfismo de $S_{(f)}$-módulos $\lambda_f\colon M_{(f)} \otimes_{S_{(f)}} N_{(f)} \to (M \otimes_S N)_{(f)}$ dado por $\frac{x}{f^m} \otimes \frac{y}{f^n} \mapsto \frac{x \otimes y}{f^{m+n}}$. Si tomamos otro elemento homogéneo de grado positivo $g \in S$, entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
M_{(f)} \otimes_{S_{(f)}} N_{(f)} \arrow[r, "\lambda_f"] \arrow[d] & (M \otimes_S N)_{(f)} \arrow[d] \\
M_{(fg)} \otimes_{S_{(fg)}} N_{(fg)} \arrow[r, "\lambda_{fg}"] & (M \otimes_S N)_{(fg)}
\end{tikzcd}$$

Denotemos por $\widetilde{M} \overset{p}{\otimes} \widetilde{N}$ el prehaz producto tensorial de $\widetilde{M}$ y $\widetilde{N}$ sobre $\mathcal{O}_X$, entonces

$$\widetilde{M} \overset{p}{\otimes} \widetilde{N}(D_+(f)) = \widetilde{M}(D_+(f)) \otimes \widetilde{N}(D_+(f)) \cong M_{(f)} \otimes_{S_{(f)}} N_{(f)} \,.$$

Por otra parte tenemos un isomorfismo $(M \otimes_S N)\tilde{}(D_+(f)) \cong (M \otimes_S N)_{(f)}$. Entonces del diagrama anterior se deduce el morfismo de $\mathcal{B}$-prehaces $\widetilde{M} \overset{p}{\otimes} \widetilde{N} \to (M \otimes_S N)\tilde{}$, donde $\mathcal{B}$ es la base formada por los abiertos $D_+(f)$ con f homogéneo de grado positivo, luego por el Corolario 4.1.5, tenemos un morfismo de haces $\lambda\colon \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{N} \to (M \otimes_S N)\tilde{}$.

Supongamos ahora que S_+ es generado por S_1, en este caso X es cubierto por los abiertos $D_+(f)$ con $f \in S_1$, entonces para mostrar que λ sea un isomorfismo, basta que los λ_f lo sean para todo $f \in S_1$. En efecto, dado $f \in S_1$, todo elemento de $(M \otimes_S N)_{(f)}$ es una suma finita de elementos de la forma $\frac{x \otimes y}{f^k}$ tal que $x \in M_m$, $y \in N_n$ y $m + n = k$. Como f es un elemento de S_1, podemos definir el homomorfismo

$$\gamma_f\colon (M \otimes_S N)_{(f)} \to M_{(f)} \otimes_{S_{(f)}} N_{(f)} \quad \text{por} \quad \frac{x \otimes y}{f^k} \mapsto \frac{x}{f^m} \otimes \frac{y}{f^n} \,.$$

No hay dificultad en ver que este homomorfismo es el inverso de λ_f. $\square$

En lo que sigue, todos los anillos graduados serán de la forma $S = S_0[S_1]$ salvo que se indique de otra manera.

Definición 4.4.2 (El haz torcido de Serre)**.** Sea S un anillo graduado y sea $X = \operatorname{Proj} S$. Para cualquier $n \in \mathbb{Z}$, definimos $\mathcal{O}_X(n)$ como el haz casi coherente $S(n)\tilde{}$ sobre X. Llamaremos *haz torcido de Serre* al haz $\mathcal{O}_X(1)$. Si $\mathcal{F}$ es un haz de $\mathcal{O}_X$-módulo, definimos el *haz torcido* $\mathcal{F}(n)$ como el haz $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n)$.

Proposición 4.4.3. *Sea S un anillo graduado y sea $X = \operatorname{Proj} S$. Se cumplen:*

(a) *El haz $\mathcal{O}_X(n)$ es un haz inversible sobre X.*

(b) *Para cualquier S-módulo graduado M, tenemos $\widetilde{M}(n) \cong (M(n))\tilde{}$. En consecuencia, $\mathcal{O}_X(n) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(m) \cong \mathcal{O}_X(n+m)$.*

(c) *Sea anillo graduado $T = T_0[T_1]$, $\varphi\colon S \to T$ un homomorfismo graduado, y consideremos el abierto $U \subseteq Y = \operatorname{Proj} T$ y el morfismo $f: U \to X$ determinado por φ, como en la Proposición 3.5.1. Entonces, si N es un T-módulo graduado, $f_*(\widetilde{N}|_U) \cong ({}_SN)\tilde{}$, y si M es un S-módulo graduado, $f^*(\widetilde{M}) \cong (M \otimes_S T)^{\sim}|_U$. En particular,*

$$f_*(\mathcal{O}_Y(n)\big|_U) \cong (f_*\mathcal{O}_U)(n) \quad y \quad f^*(\mathcal{O}_X(n)) \cong \mathcal{O}_Y(n)\big|_U.$$

Demostración. (a). Tomemos $f \in S_1$, por la Proposición 4.4.1 tenemos

$$S(n)\tilde{}\big|_{D_+(f)} \cong (S(n)_{(f)})\tilde{}$$

por otro lado, desde que la aplicación $S_{(f)} \to S(n)_{(f)}$ dada por $\frac{a}{f^k} \mapsto \frac{af^n}{f^k}$ es un isomorfismo de $S_{(f)}$-módulos, entonces $(S(n)_{(f)})\tilde{} \cong (S_{(f)})\tilde{}$. Además,

$$\mathcal{O}_X(n)\big|_{D_+(f)} = S(n)\tilde{}\big|_{D_+(f)} \cong (S(n)_{(f)})\tilde{} \cong (S_{(f)})\tilde{} \cong \mathcal{O}_X\big|_{D_+(f)}.$$

Por el Lema 2.3.9 tenemos $X = \bigcup_{f \in S_1} D_+(f)$, por tanto $\mathcal{O}_X(n)$ es un haz inversible.

(b). Usando el Lema 4.4.2 tenemos que

$$\widetilde{M}(n) = \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n) = \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} S(n)\tilde{} \cong (M \otimes_S S(n))\tilde{}$$

Por otra parte, la aplicación $M \otimes_S S(n) \to M(n)$ dada por $m \otimes t \mapsto mt$ es un isomorfismo de S-módulos, entonces $(M \otimes_S S(n))\tilde{} \cong M(n)\tilde{}$, luego $\widetilde{M}(n) \cong M(n)\tilde{}$. En consecuencia

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X(n) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(m) &= S(n)\tilde{} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(m) \\ &= S(n)\tilde{}(m) \cong (S(n)(m))\tilde{} \\ &\cong S(n+m)\tilde{} = \mathcal{O}_X(n+m). \end{aligned}$$

(c). Denotemos por $D_+^S(g)$ y $D_+^T(h)$ a los abiertos básicos de Proj S y Proj T respectivamente, donde $g \in S$ y $h \in T$ son de grado positivo. Puesto que tenemos el homomorfismo de anillos $S_{(g)} \to T_{(\varphi(g))}$ definido por $\frac{a}{g^k} \mapsto \frac{\varphi(a)}{\varphi(g)^k}$, podemos considerar al $T_{(\varphi(g))}$-módulo $N_{(\varphi(g))}$ como un $S_{(g)}$-módulo. Además, es inmediato verificar que la aplicación $\gamma_g\colon N_{(\varphi(g))} \to ({}_SN)_{(g)}$ dado por $\frac{n}{\varphi(g)^k} \mapsto \frac{n}{g^k}$ es un isomorfismo de $S_{(g)}$-módulos. Por otro lado, dados $g, g' \in S_+$ homogéneos, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} N_{(\varphi(g))} \arrow[r, "\gamma_g"] \arrow[d] & ({}_SN)_{(g)} \arrow[d] \\ N_{(\varphi(gg'))} \arrow[r, "\gamma_{gg'}"] & ({}_SN)_{(gg')} \end{tikzcd}$$

Además tenemos

$$f_*(\widetilde{N}|_U)(D_+^S(g)) = \widetilde{N}(f^{-1}(D_+^S(g))) = \widetilde{N}(D_+^T(\varphi(g))) \cong N_{(\varphi(g))}\,,$$

y también $({}_SN)_{(g)} \cong ({}_SN)\tilde{}(D_+^S(g))$ para todo $g \in S_+$ homogéneo. Por tanto, considerando $\mathcal{B}$ la base de X formado por los abiertos $D_+^S(g)$ tenemos un isomorfismo de $\mathcal{B}$-haces $f_*(\widetilde{N}|_U) \cong ({}_SN)\tilde{}$, luego por el Corolario 4.1.5, tenemos un isomorfismo de haces $f_*(\widetilde{N}|_U) \cong ({}_SN)\tilde{}$.

Veamos ahora que $f^*(\widetilde{M}) \cong (M \otimes_S T)\tilde{}\,|_U$. Sea Ω el conjunto de los elementos homogéneos $h \in \varphi(S_+)$ y sea $\mathcal{B}_U$ el conjunto de abiertos $D_+^T(h)$ con $h \in \Omega$. Afirmamos que $\mathcal{B}_U$ es una base del subespacio U de Proj T. En efecto, veamos que $U = \bigcup_{h\in\Omega} D_+^T(h)$, por definición tenemos $\mathfrak{p} \in U$ si y sólo si $\varphi(S_+) \nsubseteq \mathfrak{p}$, esto equivale a que existe un elemento homogéneo $g \in S_+$ tal que $\varphi(g) \notin \mathfrak{p}$ y esto es lo mismo decir que $\mathfrak{p} \in D_+^T(\varphi(g))$ con $\varphi(g) \in \Omega$. Por otro lado, dados $h, h' \in \Omega$ y sean $g, g' \in S_+$ homogéneos tal que $h = \varphi(g)$ y $h' = \varphi(g')$, tenemos $D_+^T(h) \cap D_+^T(h') = D_+^T(hh') = D_+^T(\varphi(g)\varphi(g')) = D_+^T(\varphi(gg'))$, esto prueba que $D_+^T(h) \cap D_+^T(h) \in \mathcal{B}_U$, y se sigue nuestra afirmación.

Sean h, h', g y g' como antes, entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} (M \otimes_S T)_{(h)} \arrow[r] \arrow[d] & M_{(g)} \otimes_{S_{(g)}} T_{(h)} \arrow[d] \\ (M \otimes_S T)_{(hh')} \arrow[r] & M_{(gg')} \otimes_{S_{(gg')}} T_{(hh')} \end{tikzcd}$$

aplicando el funtor $\sim$ tenemos siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} ((M \otimes_S T)_{(h)})^{\sim} \arrow[r] \arrow[d] & (M_{(g)} \otimes_{S_{(g)}} T_{(h)})^{\sim} \arrow[d] \\ ((M \otimes_S T)_{(hh')})^{\sim} \arrow[r] & (M_{(gg')} \otimes_{S_{(gg')}} T_{(hh')})^{\sim} \end{tikzcd}$$

donde $((M \otimes_S T)_{(h)})^{\sim}$ se identifica con $(M \otimes_S T)^{\sim}|_{D_+^T(h)}$. Por otra parte, es inmediato comprobar que $f(D_+^T(h)) \subseteq D_+^S(g)$, luego tenemos un isomorfismo

$$(f|_{D_+^T(h)})^*(\widetilde{M}|_{D_+^S(g)}) \cong f^*(\widetilde{M})|_{D_+^T(h)}\,.$$

Puesto que $D_+^T(h)$ y $D_+^S(g)$ son esquemas afines, por el ítem (e) de la Proposición 4.1.8, tenemos

$$(f|_{D_+^T(h)})^*(\widetilde{M}|_{D_+^S(g)}) \cong (f|_{D_+^T(h)})^*((M_{(g)})^\sim) \cong (M_{(g)} \otimes_{S_{(g)}} T_{(h)})^\sim .$$

De esta manera tenemos el isomorfismo $(M \otimes_S T)^\sim|_{D_+^T(h)} \cong f^*(\widetilde{M})|_{D_+^T(h)}$. Además del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
(M \otimes_S T)^\sim|_{D_+^T(h)} \arrow[r] \arrow[d] & f^*(\widetilde{M})|_{D_+^T(h)} \arrow[d] \\
(M \otimes_S T)^\sim|_{D_+^T(hh')} \arrow[r] & f^*(\widetilde{M})|_{D_+^T(hh')}
\end{tikzcd}$$

y del Lema 3.1.25 resulta el isomorfismo deseado $(M \otimes_S T)^\sim|_U \cong f^*(\widetilde{M})$.

Por un lado tenemos,

$$\begin{aligned}
f_*(\mathcal{O}_Y(n)|_U) &= f_*(T(n)^\sim|_U) \cong ({}_ST(n))^\sim \cong ({}_ST)^\sim(n) \cong f_*(T^\sim|_U)(n) \\
&= f_*(\mathcal{O}_Y|_U)(n) = f_*(\mathcal{O}_U)(n)\,,
\end{aligned}$$

y por otro lado,

$$f^*(\mathcal{O}_X(n)) = f^*(S(n)^\sim) = (S(n) \otimes_S T)^\sim|_U \cong T(n)^\sim|_U = \mathcal{O}_Y(n)|_U\,.$$

De esta manera concluye la demostración. □

Observación 4.4.2. *Sea S un anillo graduado, $X = \operatorname{Proj} S$ y sea $\mathcal{F}$ un haz de $\mathcal{O}_X$-módulos, entonces $\mathcal{F}(n) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(d) \cong \mathcal{F}(n+d)$, en efecto,*

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(n) \otimes \mathcal{O}_X(d) &= (\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(n)) \otimes \mathcal{O}_X(d) \\
&\cong \mathcal{F} \otimes (\mathcal{O}_X(n) \otimes \mathcal{O}_X(d)) \\
&\cong \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(n+d) = \mathcal{F}(n+d)\,.
\end{aligned}$$

Definición 4.4.3. Sea S un anillo graduado, $X = \operatorname{Proj} S$ y sea $\mathcal{F}$ un haz de $\mathcal{O}_X$-módulos, definimos el grupo $\Gamma_*(\mathcal{F}) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \Gamma(X, \mathcal{F}(n))$.

Observación 4.4.3. A continuación vamos a dotar a $\Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ de una estructura de anillo graduado y haremos de $\Gamma_*(\mathcal{F})$ un $\Gamma_*(\mathcal{O}_X)$-módulo graduado (este será visto como un S-módulo graduado como lo indica la Observación 4.4.4). En efecto, para cada par de enteros m, n, sea el homomorfismo

$$\lambda_{m,n} \colon \Gamma(X, \mathcal{O}_X(m)) \otimes \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n)) \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X(m+n))\,,$$

que resulta de componer el homomorfismo natural

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X(m)) \otimes \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n)) \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X(m) \otimes \mathcal{O}_X(n))$$

y el isomorfismo $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(m) \otimes \mathcal{O}_X(n)) \cong \Gamma(X, \mathcal{O}_X(m+n))$. Este último resulta del isomorfismo $\mathcal{O}_X(m) \otimes \mathcal{O}_X(n)) \cong \mathcal{O}_X(m) \otimes \mathcal{O}_X(n)$ (ver Observación 4.4.2). Dados dos elementos $f = \sum_n f_n$ y $g = \sum_n g_n$ de $\Gamma_*(\mathcal{O}_X)$, definimos el producto $fg = \sum_{m,n} \lambda_{m,n}(f_m \otimes g_n)$. Se comprueba fácilmente que este producto convierte a $\Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ en un anillo graduado.

Ahora consideremos el homomorfismo natural

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X(m)) \otimes \Gamma(X, \mathcal{F}(n)) \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X(m) \otimes \mathcal{F}(n))$$

y el isomorfismo $\mathcal{O}_X(m) \otimes \mathcal{F}(n) \cong \mathcal{F}(m+n)$. Entonces tenemos el homomorfismo

$$\beta_{m,n} \colon \Gamma(X, \mathcal{O}_X(m)) \otimes \Gamma(X, \mathcal{F}(n)) \to \Gamma(X, \mathcal{F}(m+n)).$$

Sean $f = \sum_n f_n \in \Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ y $s = \sum_n s_n \in \Gamma_*(\mathcal{F})$, definimos el producto por escalar $f \cdot s = \sum_{m,n} \beta_{m,n}(f_m \otimes s_n)$, y es inmediato comprobar que este producto convierte a $\Gamma_*(\mathcal{F})$ en un $\Gamma_*(\mathcal{O}_X)$-módulo graduado.

Proposición 4.4.4 (El homomorfismo α_M)**.** *Sea S un anillo graduado y sea M un S-módulo graduado. Entonces existen un homomorfismo de grupos $\alpha_M \colon M \to \Gamma_*(\widetilde{M})$ y un homomorfismo de anillos $\alpha_S \colon S \to \Gamma_*(\mathcal{O}_X)$, de manera que α_M es un homomorfismo de S-módulos graduados.*

Demostración. Sea $X = \operatorname{Proj} S$ y fijemos un entero $n \in \mathbb{Z}$. Si $f \in S_+$ es un elemento homogéneo, la aplicación $M_n \to M(n)_{(f)}$ definida por $x \mapsto x/1$ es un homomorfismo de grupos abelianos, y debido a la Proposición 4.4.3 junto con la afirmación (d) en la Proposición 4.1.7 tenemos un isomorfismo $\psi_n^f \colon M(n)_{(f)} \cong \Gamma(D_+(f), \widetilde{M}(n))$. Componiendo obtenemos un homomorfismo de grupos abelianos $\alpha_n^f \colon M_n \to \Gamma(D_+(f), \widetilde{M}(n))$. Si tomamos otro elemento homogéneo $g \in S_+$, entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & M_n \arrow[dl, "\alpha_n^f"'] \arrow[dr, "\alpha_n^g"] & \\
\Gamma(D_+(f), \widetilde{M}(n)) \arrow[dr] & & \Gamma(D_+(g), \widetilde{M}(n)) \arrow[dl] \\
 & \Gamma(D_+(fg), \widetilde{M}(n)) &
\end{tikzcd}$$

donde las flechas inferiores son las restricciones usuales. Esto significa que para todo $x \in M_n$ las secciones $\alpha_n^f(x)$ y $\alpha_n^g(x)$ coinciden en $D_+(f) \cap D_+(g)$, y puesto que los abiertos $D_+(f)$ cubren a X, existe una única sección $\alpha_n(x) \in \Gamma(X, \widetilde{M}(n))$ tal que $\alpha_n(x)|_{D_+(f)} = \alpha_n^f(x)$ para todo elemento homogéneo $f \in S_+$. Así queda definida la aplicación $\alpha_n \colon M_n \to \Gamma(X, \widetilde{M}(n))$ que por el Lema 3.1.15 es un homomorfismo de grupos, y por extensión conseguimos el homomorfismo de grupos

$$\alpha_M := \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_n \colon M \to \Gamma_*(\widetilde{M}).$$

Por otro lado, si hacemos $M = S$, entonces $\alpha_S\colon S \to \Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ es un homomorfismo de anillos. En efecto, sean $s_m \in S_m$, $t_n \in S_n$ y tomemos un elemento homogéneo $f \in S_+$, entonces

$$\alpha_S(s_m t_n)|_{D_+(f)} = \alpha_{m+n}(s_m t_n)|_{D_+(f)} = \alpha^f_{m+n}(s_m t_n) = \psi^f_{m+n}\left(\frac{s_m t_n}{1}\right). \tag{4.4.5}$$

Ahora bien, si tomamos un punto arbitrario $\mathfrak{p} \in D_+(f)$, tenemos

$$\psi^f_{m+n}\left(\frac{s_m t_n}{1}\right)(\mathfrak{p}) = \frac{s_m t_n}{1} = \frac{s_m}{1}\cdot\frac{t_n}{1} = \psi^f_m\left(\frac{s_m}{1}\right)(\mathfrak{p})\cdot\psi^f_n\left(\frac{t_n}{1}\right)(\mathfrak{p}),$$

y por tanto $\psi^f_{m+n}(\frac{s_m t_n}{1}) = \psi^f_m(\frac{s_m}{1})\psi^f_n(\frac{t_n}{1})$, es decir $\alpha^f_{m+n}(s_m t_n) = \alpha^f_m(s_m)\alpha^f_n(t_n)$. Por otro lado tenemos

$$\begin{aligned}\alpha^f_m(s_m)\alpha^f_n(t_n) &= \alpha_m(s_m)|_{D_+(f)}.\alpha_n(t_n)|_{D_+(f)}\\ &= \alpha_S(s_m)|_{D_+(f)}\alpha_S(t_n)|_{D_+(f)} = (\alpha_S(s_m)\alpha_S(t_n))|_{D_+(f)}.\end{aligned} \tag{4.4.6}$$

Combinando las relaciones (4.4.5) y (4.4.6) llegamos a la igualdad

$$\alpha_S(s_m t_n)|_{D_+(f)} = (\alpha_S(s_m).\alpha_S(t_n))|_{D_+(f)},$$

donde $f \in S_+$ es homogéneo. Por tanto $\alpha_S(s_m t_n) = \alpha_S(s_m).\alpha_S(t_n)$. Ahora bien, sean $s = \sum_{m\geq 0} s_m$ y $t = \sum_{n\geq 0} t_n$ dos elementos de S, entonces

$$\begin{aligned}\alpha_S(st) = \alpha_S(\sum_{m,n\geq 0} s_m t_n) &= \sum_{m,n\geq 0}\alpha_S(s_m t_n) = \sum_{m,n\geq 0}\alpha_S(s_m)\alpha_S(t_n)\\ &= \sum_{m\geq 0}\alpha_S(s_m)\sum_{n\geq 0}\alpha_S(t_n) = \alpha_S(s)\alpha_S(t).\end{aligned}$$

Así, α_S es un homomorfismo de anillos. Finalmente, imitando el procedimiento anterior obtenemos también $\alpha_M(s\cdot x) = \alpha_S(s)\cdot\alpha_M(x)$ para todo $s \in S$ y $x \in M$. Puesto que $\Gamma_*(\widetilde{M})$ es un $\Gamma_*(\mathcal{O}_X)$-módulo, la operación inducida

$$S \times \Gamma_*(\widetilde{M}) \to \Gamma_*(\widetilde{M}), \quad \text{definida por} \quad (s, f) \mapsto \alpha_S(s)f,$$

hace de $\Gamma_*(\widetilde{M})$ un S-módulo graduado y de α_M un homomorfismo de S-módulos graduados. □

Observación 4.4.4. En la definición 4.4.3, podemos considerar a $\Gamma_*(\mathcal{F})$ como un S-módulo graduado, debido al homomorfismo de anillos graduados $\alpha_S\colon S \to \Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ dada en la proposición anterior.

Proposición 4.4.5. *Sea S un anillo graduado y $X = \operatorname{Proj} S$. Entonces Γ_* es un funtor covariante de la categoría $\mathfrak{Mod}(X)$ en S***ModGr**.

Demostración. Si $\mathcal{F}$ es un haz de $\mathcal{O}_X$-módulos, entonces $\Gamma_*(\mathcal{F})$ es un S-módulo graduado (ver Observación 4.4.4). Sea $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de $\mathcal{O}_X$-módulos, denotemos por $\mathcal{F} \overset{p}{\otimes} \mathcal{O}_X(n)$ al prehaz producto tensorial de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{O}_X(n)$ sobre $\mathcal{O}_X$, de esta manera tenemos

$(\mathcal{F} \overset{p}{\otimes} \mathcal{O}_X(n))^+ = \mathcal{F}(n)$. Si denotamos por id_n al morfismo identidad sobre $\mathcal{O}_X(n)$, tenemos un morfismo de prehaces $\varphi \overset{p}{\otimes} id_n \colon \mathcal{F} \overset{p}{\otimes} \mathcal{O}_X(n) \to \mathcal{G} \overset{p}{\otimes} \mathcal{O}_X(n)$, luego tenemos el morfismo asociado $(\varphi \overset{p}{\otimes} id_n)^+ \colon \mathcal{F}(n) \to \mathcal{G}(n)$. Si $(\varphi \overset{p}{\otimes} id_n)^+_X$ es el homomorfismo de secciones globales de $(\varphi \overset{p}{\otimes} id_n)^+$, entonces definimos el homomorfismo graduado

$$\Gamma_*(\varphi) := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} (\varphi \overset{p}{\otimes} id_n)^+_X \colon \Gamma_*(\mathcal{F}) \to \Gamma_*(\mathcal{G})\,.$$

Sean $\varphi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ y $\psi \colon \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ dos morfismos de $\mathcal{O}_X$-módulos, entonces $((\psi\circ\varphi) \overset{p}{\otimes} id_n)^+ = ((\psi \overset{p}{\otimes} id_n)\circ(\varphi \overset{p}{\otimes} id_n))^+ = (\psi \overset{p}{\otimes} id_n)^+\circ(\varphi \overset{p}{\otimes} id_n)^+$, luego $((\psi\circ\varphi) \overset{p}{\otimes} id_n)^+_X = (\psi \overset{p}{\otimes} id_n)^+_X \circ (\varphi \overset{p}{\otimes} id_n)^+_X$, por tanto $\Gamma_*(\psi\circ\varphi) = \Gamma_*(\psi)\circ\Gamma_*(\varphi)$, por otro lado $(id_{\mathcal{F}} \overset{p}{\otimes} id_n)^+_X = id_{\Gamma(X,\mathcal{F}(n))}$ de donde tenemos $\Gamma_*(id_{\mathcal{F}}) = id_{\Gamma_*(\mathcal{F})}$. Por tanto Γ_* es un funtor covariante. $\square$

Observación 4.4.5. El funtor Γ_* es un funtor exacto a izquierda de $\mathfrak{QCoh}(X)$ en S**ModGr**. Sea $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ una sucesión exacta en $\mathfrak{QCoh}(X)$. Tomemos un entero n, afirmamos que la sucesión

$$0 \to \mathcal{F}(n) \to \mathcal{G}(n) \to \mathcal{H}(n) \to 0$$

es exacta. En efecto, sea $f \in S_+$ homogéneo y sea $A = S_{(f)}$, entonces $\mathcal{F}|_{D_+(f)} = \widetilde{M}$, $\mathcal{G}|_{D_+(f)} = \widetilde{N}$ y $\mathcal{H}|_{D_+(f)} = \widetilde{P}$ donde M, N y P son A-módulos. Luego $\mathcal{F}(n)|_{D_+(f)} = M(n)\widetilde{\ }$, $\mathcal{G}(n)|_{D_+(f)} = N(n)\widetilde{\ }$ y $\mathcal{H}(n)|_{D_+(f)} = P(n)\widetilde{\ }$. Sea $\mathfrak{p} \in X$ tal que $f \notin \mathfrak{p}$, y sea $\mathfrak{q}$ la contracción del ideal $\mathfrak{p}$ vía el homomorfismo $S_{(f)} \to S$, entonces tenemos los diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{F}_{\mathfrak{p}} \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow] & \mathcal{G}_{\mathfrak{p}} \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow] & \mathcal{H}_{\mathfrak{p}} \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_{\mathfrak{q}} \arrow[r] & N_{\mathfrak{q}} \arrow[r] & P_{\mathfrak{q}} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{4.4.7}$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{F}(n)_{\mathfrak{p}} \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow] & \mathcal{G}(n)_{\mathfrak{p}} \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow] & \mathcal{H}(n)_{\mathfrak{p}} \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow] & 0 \\
0 \arrow[r] & M(n)_{\mathfrak{q}} \arrow[r] & N(n)_{\mathfrak{q}} \arrow[r] & P(n)_{\mathfrak{q}} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{4.4.8}$$

Del diagrama (4.4.7) tenemos que su sucesión inferior es exacta, luego la sucesión inferior de (4.4.8) es exacta, por tanto su sucesión superior es exacta para $\mathfrak{p} \in D_+(f)$, pero como f es arbitrario, podemos conseguir que es exacta para todo $\mathfrak{p} \in X$, esto implica que la sucesión

$$0 \to \mathcal{F}(n) \to \mathcal{G}(n) \to \mathcal{H}(n) \to 0$$

es exacta, luego tenemos la sucesión exacta

$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}(n)) \to \Gamma(X, \mathcal{G}(n)) \to \Gamma(X, \mathcal{H}(n))$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Estas sucesiones forman una sucesión exacta

$$0 \to \Gamma_*(\mathcal{F}) \to \Gamma_*(\mathcal{G}) \to \Gamma_*(\mathcal{H})$$

como queremos.

Corolario 4.4.6. *Sea A un anillo, sea $S = A[x_0, \ldots, x_r]$, $r \geq 0$, y sea $X = \operatorname{Proj} S$. Entonces $S \cong \Gamma_*(\mathcal{O}_X)$.*

Demostración. Puesto que los elementos $x_0, \ldots, x_r \in S_1$ generan a S como S_0-álgebra (en este caso $S_0 = A$), los abiertos $D_+(x_i)$ cubren a X. Consideremos el homomorfismo de anillos $\alpha = \alpha_S \colon S \to \Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ de la Proposición 4.4.4 , este homomorfismo era suma directa de los homomorfismo de grupos $\alpha_n \colon S_n \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n))$ con $n \in \mathbb{Z}$, y para cada i, teníamos que $\alpha_n(f)|_{D_+(x_i)} = \alpha_n^{x_i}(f)$ para todo $f \in S_n$, donde $\alpha_n^{x_i} \colon S_n \to S(n)_{(x_i)}$ es el homomorfismo definido por $f \mapsto f/1$. Así, para probar que α es un isomorfismo, basta probar que cada α_n es biyectiva. Veamos que α_n es inyectiva, tomemos $f \in S_n$ tal que $\alpha_n(f) = 0$ esto implica que $f/1 = 0$ en $S(n)_{(x_i)}$ para todo $i = 0, .., r$. Fijando i, existe un entero k tal que $x_i^k f = 0$, y como x_i no es divisor de cero, tenemos $f = 0$. A continuación veamos que α_n es sobreyectiva. Dar un elemento de $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(n))$ equivale a dar $r + 1$ elementos $\frac{f_i}{x_i^k} \in S(n)_{(x_i)}$ tal que $\frac{f_i}{x_i^k} = \frac{f_j}{x_j^k}$ en $S(n)_{(x_i x_j)}$ para todo $i, j = 0, .., r$, donde $f_i \in S_{k+n}$ para todo i. A continuación encontraremos un elemento $f \in S_n$ tal que $\frac{f}{1} = \frac{f_i}{x_i^k}$ en $S(n)_{(x_i)}$ para todo $i = 0, .., r$, para ello afirmamos que x_i^k divide a f_i para todo $i = 0, .., r$, esto equivale a decir que todo monomial de f_i tiene a x_i^k como factor. En efecto, si $r = 0$, tenemos que $X = D_+(x_0)$, lo que nos da un único elemento $\frac{f_0}{x_0^k} \in S(n)_{(x_0)}$ donde $f_0 \in S_{k+n}$, luego $f_0 = a x_0^{k+n}$ para algún $a \in A$. Supongamos ahora que $r > 0$ y fijemos un índice $i = 0, .., r$; tomando $j \neq i$, de la igualdad $\frac{f_i}{x_i^k} = \frac{f_j}{x_j^k}$ y desde que x_i, x_j no son divisores de cero tenemos que $x_j^k f_i = x_i^k f_j$. Ahora, si g_i es un monomial de f_i, entonces $x_j^k g_i$ es un monomial que contiene a x_i^k como factor, de donde se sigue que x_i^k es un factor de g_i. De esta manera x_i^k divide a f_i para todo $i = 0, .., r$ como afirmamos. Luego escribiendo $f_i = x_i^k h_i$ donde $h_i \in S_n$, tenemos $(x_i x_j)^k h_i = x_j^k f_i = x_i^k f_j = (x_i x_j)^k h_j$, de donde $h_i = h_j$. Tomamos $f = h_{i_0} \in S_n$ donde i_0 es un índice fijo, entonces $\frac{f}{1} = \frac{x_i^k h_{i_0}}{x_i^k} = \frac{x_i^k h_i}{x_i^k} = \frac{f_i}{x_i^k}$ para todo $i = 0, .., r$. Por tanto α_n es sobreyectiva. $\square$

Proposición 4.4.7. *Sea S un dominio graduado generado por S_1 como un S_0-álgebra con $S_+ \neq 0$, $X = \operatorname{Proj} S$ y sea $S' = \bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n))$. Entonces*

(a) *El homomorfismo $\alpha_S \colon S \to \Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ es inyectivo. En consecuencia, S es considerado como un subanillo de S'.*

(b) *El anillo $\Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ es un dominio. Además, si S es noetheriano, el anillo S' es integral sobre S y está contenido en el cuerpo de fracciones Q de S.*

Demostración. (a). Como $S_+ \neq 0$ y S es dominio, por el Lema 2.3.10 conseguimos $\operatorname{Proj} S \neq \emptyset$, entonces existe algún $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} S$. Ahora bien, desde que $S_+ \nsubseteq \mathfrak{p}$, del Lema 2.3.9 existe $f \in S_1$ tal que $f \notin \mathfrak{p}$, así $f \neq 0$. Para probar que α_S es inyectiva, es suficiente probar que para cada $n \geq 0$, el homomorfismo $\alpha_n \colon S_n \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n))$ es inyectivo . Sea $t \in S_n$ tal que $\alpha_n(t) = 0$, entonces $0 = \alpha_n(t)|_{D_+(f)} = \alpha_n^f(t) \equiv t/1 \in S(n)_{(f)}$, luego $t/1 = 0$, entonces existe un entero l tal que $f^l t = 0$, esto implica que $t = 0$ como queríamos. Por otro lado, como $\alpha_S(S) \subseteq S'$, podemos considerar a S como subanillo de S'.

(b). Supongamos que S es generado como S_0-álgebra por un número finito de elementos no nulos $x_0, \ldots, x_r \in S_1$. Para cada $n \in \mathbb{Z}$ y cada elemento homogéneo $f \in S_+$, consideremos el isomorfismo

$$\psi_n^f \colon S(n)_{(f)} \xrightarrow{\sim} \Gamma(D_+(f), \mathcal{O}_X(n))\,.$$

Sea T el conjunto de tuplas $(t_0, \ldots, t_r)$ donde $t_i \in S_{x_i}$ tal que t_i, t_j tienen la misma imagen en $S_{x_i x_j}$, para todo i, j. Dotando a T de la suma y producto puntual

$$\begin{aligned}(t_0, \ldots, t_r) + (s_0, \ldots, s_r) &:= (t_0 + s_0, \ldots, t_r + s_r)\,,\\ (t_0, \ldots, t_r).(s_0, \ldots, s_r) &:= (t_0 s_0, \ldots, t_r s_r)\,,\end{aligned}$$

el conjunto T es un anillo graduado con graduación T_n, formado por tuplas $(t_0, \ldots, t_r)$ donde $t_i \in (S_{x_i})_n$ para todo i. Definimos el homomorfismo de grupos

$$\rho_n^i \colon T_n \to \Gamma(D_+(x_i), \mathcal{O}_X(n))\,, \quad \text{dado por} \quad (t_0, \ldots, t_r) \mapsto \psi_n^{x_i}(t_i)\,.$$

Del diagrama

$$\begin{tikzcd} S_{x_i} \arrow[dr] & & S_{x_j} \arrow[dl] \\ & S_{x_i x_j} & \end{tikzcd}$$

y desde que $(S_{x_i})_n = S(n)_{(x_i)}$, $(S_{x_j})_n = S(n)_{(x_j)}$ y $(S_{x_i x_j})_n = S(n)_{(x_i x_j)}$, tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} S(n)_{(x_i)} \arrow[dr] & & S(n)_{(x_j)} \arrow[dl] \\ & S(n)_{(x_i x_j)} & \end{tikzcd}$$

luego si $(t_0, \ldots, t_r) \in T_n$ entonces los elementos t_i, t_j coinciden en $S(n)_{(x_i x_j)}$. Esto es equivalente a decir que

$$\psi_n^{x_i}(t_i)|_{D_+(x_i x_j)} = \psi_n^{x_i}(t_j)|_{D_+(x_i x_j)} \quad \text{en} \quad \Gamma(D_+(x_i x_j), \mathcal{O}_X(n))$$

De la propiedad de haz, existe una única sección global $\rho_n(t_0, \ldots, t_r)$ de $\mathcal{O}_X(n)$ tal que $\rho_n(t_0, \ldots, t_r)|_{D_+(x_i)} = \psi_n^{x_i}(t_i)$ para todo $i = 0, \ldots, r$. Luego por el Lema 3.1.15, tenemos un homomorfismo de grupos $\rho_n \colon T_n \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n))$. Veamos que ρ_n es un isomorfismo, sea $(t_0, \ldots, t_r) \in T_n$ tal que $\rho_n(t_0, \ldots, t_r) = 0$, entonces $\psi_n^{x_i}(t_i) = \rho_n(t_0, \ldots, t_r)|_{D_+(x_i)} = 0$, así $t_i = 0$ para todo $i = 0, \ldots, r$, esto muestra que ρ_n es inyectiva. Por otro lado, dado $s \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n))$, para cada $i = 0, .., r$ tomemos $t_i := (\psi_n^{x_i})^{-1}(s|_{D_+(x_i)}) \in S(n)_{(x_i)}$, luego de la igualdad $\psi_n^{x_i}(t_i) = s|_{D_+(x_i)}$ y de la definición de $\rho_n(t_0, \ldots, t_r)$, tenemos $\rho_n(t_0, \ldots, t_r) = s$, o sea que ρ_n es sobreyectiva. Por tanto, el homomorfismo anillos graduados $\rho = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \rho_n \colon T \to \Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ es un isomorfismo. Por otra parte, puesto que los elementos x_i son no nulos y S es dominio, los homomorfismos canónicos $\gamma_{i,j} \colon S_{x_i} \to S_{x_i x_j}$ y $\lambda_i \colon S_{x_i} \to$

$S_{x_1\cdots x_r}$ son todos inyectivos, y λ_i se factoriza por la inyección $\kappa_{i,j}\colon S_{x_ix_j} \to S_{x_1\cdots x_r}$, es decir $\lambda_i = \kappa_{i,j} \circ \gamma_{i,j}$ para todo i, j. Sea $(t_0, \ldots, t_r) \in T$, entonces t_i, t_j tienen la misma imagen en $S_{x_ix_j}$, es decir $\gamma_{i,j}(t_i) = \gamma_{j,i}(t_j)$, y puesto que $\kappa_{i,j} = \kappa_{j,i}$, componiendo tenemos $\lambda_i(t_i) = \lambda_j(t_j)$ para todo i, j, de esta manera el homomorfismo $T \to S_{x_1\cdots x_r}$ dado por $(t_0, \ldots, t_r) \mapsto \lambda_i(t_i)$ es independiente de i, además este homomorfismo es inyectivo, pues, si $\lambda_i(t_i) = 0$ entonces $t_i = 0$ ya que λ_i es inyectivo, y como $\lambda_j(t_j) = \lambda_i(t_i) = 0$ tenemos $t_j = 0$ para todo j. Así tenemos $S \hookrightarrow S' \subseteq \Gamma_*(\mathcal{O}_X) \cong T \hookrightarrow S_{x_1\cdots x_r}$ por lo cual podemos considerar a $\Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ como un subanillo del dominio $S_{x_1\cdots x_r}$ conteniendo S, en particular S' y $\Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ son dominios.

Supongamos ahora que S es noetheriano. Dado un elemento $b \in S'_n = \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n))$ homogéneo donde $n \geq 0$, entonces para cada $0 \leq i \leq r$, existe un entero $m = m(i) \geq 0$ y un elemento homogéneo $a \in S_{n+m}$ tal que $a/x_i^m \in S(n)_{(x_i)}$ y $b|_{D_+(x_j)} = \psi_n^{x_j}(a/x_i^m)$, luego $(\alpha_S(x_i^m)b)|_{D_+(x_j)} = \alpha_m^{x_j}(x_i^m)b|_{D_+(x_j)} = \psi_m^{x_j}(x_i^m/1)\psi_n^{x_j}(a/x_i^m) = \psi_{m+n}^{x_j}(a/1) = \alpha_S(a)|_{D_+(x_j)}$ para todo j, entonces $\alpha_S(x_i^m)b = \alpha_S(a)$, luego considerando $S \subseteq S'$, tenemos $x_i^m b \in S$. Por otro lado, como $\{x_0, \ldots, x_r\} \subseteq S$, tomando m_0 suficientemente grande, tenemos $x_i^{m_0} b \in S$ para todo $0 \leq i \leq r$, y puesto que los elementos x_i generan S como S_0-álgebra, cualquier elemento $y \in S_d$ es un polinomial de grado d en $x_0, .., x_r$ con coeficientes en S_0. Si tomamos un entero $k \geq m_0(r+1) + n$, entonces $yb \in S$ para todo $y \in S_d$ con $d \geq k$, y puesto que el grado de b es no negativo, para cualquier $y \in S_{\geq m} = \bigoplus_{d \geq m} S_d$, tenemos $yb \in S_{\geq m}$ para $m \geq k$. Luego, por inducción probamos que $yb^q \in S$ para cualquier cualquier $y \in S_{\geq m}$ y $q \geq 1$. En particular tenemos que $x_0^m b^q \in S$ para $q \geq 1$. Sea K el cuerpo de fracciones de S', entonces $(1/x_0^m)S$ es un S-submódulo finitamente generado de K, que contiene al anillo $S[b]$. Ahora bien, puesto que S es noetheriano el S-módulo $S[b]$ es finitamente generado, así que b es integral sobre S, y como la suma finita de elementos integrales es también integral, entonces todo elemento de S' es integral sobre S. Finalmente, de lo anterior tenemos $S[b] \subseteq (1/x_0^m)S \subseteq Q$, de donde $b \in Q$ con b homogéneo, luego se sigue que $S' \subseteq Q$. □

Proposición 4.4.8 (El morfismo $\beta_{\mathcal{F}}$). *Sea S un anillo graduado, $X = \operatorname{Proj} S$ y sea $\mathcal{F}$ un haz de $\mathcal{O}_X$-módulos. Entonces existe un morfismo natural $\beta_{\mathcal{F}}\colon \Gamma_*(\mathcal{F})\tilde{} \to \mathcal{F}$.*

Demostración. Hagamos $M = \Gamma_*(\mathcal{F})$. Dado $f \in S_d$ con $d > 0$ y sean $n, m \geq 0$ dos enteros fijos. Tenemos

$$\alpha_S(f^n)|_{D_+(f)} = \alpha_{nd}^f(f^n) = \psi_{nd}^f(\frac{f^n}{1}),$$

donde la última igualdad resulta desde que α_{nd}^f se factoriza mediante el isomorfismo $\psi_n^f\colon S(n)_{(f)} \xrightarrow{\sim} \Gamma(D_+(f), \mathcal{O}_X(n))$ (ver Proposición 4.4.4). Denotemos por $(\alpha_S(f^m)|_{D_+(f)})^{-1}$ al elemento $\psi_{-md}^f(\frac{1}{f^m})$ de $\Gamma(D_+(f), \mathcal{O}_X(-md))$ donde $\frac{1}{f^m} \in S(-md)_{(f)}$. Por otro lado el producto $\psi_{nd}^f(\frac{f^n}{1})\psi_{-md}^f(\frac{1}{f^m})$ es igual a $\psi_{(n-m)d}^f(\frac{f^{n-m}}{1})$ si $n \geq m$, e igual a $\psi_{-(m-n)d}^f(\frac{1}{f^{m-n}})$ si $m > n$, entonces

$$\alpha_S(f^n)|_{D_+(f)}(\alpha_S(f^m)|_{D_+(f)})^{-1} = \begin{cases} \alpha_S(f^{n-m})|_{D_+(f)}, & \text{si} \quad n \geq m, \\ (\alpha_S(f^{m-n})|_{D_+(f)})^{-1}, & \text{si} \quad m > n. \end{cases} \tag{4.4.9}$$

En particular, $\alpha_S(f^n)|_{D_+(f)}(\alpha_S(f^n)|_{D_+(f)})^{-1} = 1$. Notemos que si z/f^n es un elemento de $M_{(f)}$ tal que $f^k z = 0$ para algún $k \geq 0$, tenemos $0 = (f^k z)|_{D_+(f)} := \alpha_S(f^k)|_{D_+(f)} z|_{D_+(f)}$. Multiplicando por $(\alpha_S(f^k)|_{D_+(f)})^{-1}$, obtenemos que $z|_{D_+(f)} = 0$, así

$$(\alpha_S(f^n)|_{D_+(f)})^{-1}(z|_{D_+(f)}) = 0\,.$$

Esto nos permite definir un homomorfismo de $S_{(f)}$-módulos

$$\beta_f \colon M_{(f)} \to \Gamma(D_+(f), \mathcal{F}), \quad \text{dada por} \quad \frac{z}{f^n} \mapsto (\alpha_S(f^n)|_{D_+(f)})^{-1}(z|_{D_+(f)}).$$

Comprobemos que β_f es un homomorfismo. Sean $z/f^n, w/f^m \in M_{(f)}$, considerando la ecuación (4.4.9), tenemos

$$\begin{aligned}
&\beta_f(\frac{f^m z + f^n w}{f^{m+n}}) = (\alpha_S(f^{m+n})|_{D_+(f)})^{-1}(f^m z + f^n w)|_{D_+(f)} \\
&= (\alpha_S(f^{m+n})|_{D_+(f)})^{-1}\alpha_S(f^m)|_{D_+(f)} z|_{D_+(f)} \\
&\qquad\qquad + (\alpha_S(f^{m+n})|_{D_+(f)})^{-1}\alpha_S(f^n)|_{D_+(f)} w|_{D_+(f)} \\
&= (\alpha_S(f^n)|_{D_+(f)})^{-1} z|_{D_+(f)} + (\alpha_S(f^m)|_{D_+(f)})^{-1} w|_{D_+(f)} \\
&= \beta_f(\frac{z}{f^n}) + \beta_f(\frac{w}{f^m}).
\end{aligned}$$

Si $s/f^m \in S_{(f)}$, tenemos

$$\begin{aligned}
&\beta_f(\frac{s}{f^m}\frac{z}{f^n}) = \beta_f(\frac{s\,z}{f^{m+n}}) = (\alpha_S(f^{m+n})|_{D_+(f)})^{-1}(sz)|_{D_+(f)} \\
&= (\alpha_S(f^m)|_{D_+(f)})^{-1}(\alpha_S(f^n)|_{D_+(f)})^{-1}\alpha_S(s)|_{D_+(f)}\, z|_{D_+(f)} \\
&= \big[(\alpha_S(f^m)|_{D_+(f)})^{-1}\alpha_S(s)|_{D_+(f)}\big].\big[(\alpha_S(f^n)|_{D_+(f)})^{-1} z|_{D_+(f)}\big] \\
&=: \frac{s}{f^m}\beta_f(\frac{z}{f^n}).
\end{aligned}$$

Por otra parte, si $f \in S_d$ y $g \in S_e$, tenemos que el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
M_{(f)} \arrow[r, "\beta_f"] \arrow[d] & \Gamma(D_+(f), \mathcal{F}) \arrow[d] \\
M_{(fg)} \arrow[r, "\beta_{fg}"] & \Gamma(D_+(fg), \mathcal{F})
\end{tikzcd}$$

entonces tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(D_+(f), \widetilde{M}) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d] & M_{(f)} \arrow[r, "\beta_f"] \arrow[d] & \Gamma(D_+(f), \mathcal{F}) \arrow[d] \\
\Gamma(D_+(fg), \widetilde{M}) \arrow[r, Rightarrow] & M_{(fg)} \arrow[r, "\beta_{fg}"] & \Gamma(D_+(fg), \mathcal{F})
\end{tikzcd}$$

De esta manera tenemos un morfismo de $\mathcal{B}$-haces $\widetilde{M} \to \mathcal{F}$, donde $\mathcal{B}$ es la base de abiertos formada por los abiertos $D_+(f)$ con $f \in S_+$ homogéneo. Por el Corolario 4.1.5, tenemos un morfismo de haces $\beta_{\mathcal{F}} \colon \widetilde{M} = \Gamma_*(\mathcal{F})\widetilde{\ } \to \mathcal{F}$ como se quería. $\square$

Proposición 4.4.9. *Sea S un anillo graduado y M un S-módulo graduado, entonces el morfismo compuesto*

$$\widetilde{M} \xrightarrow{\tilde{\alpha}_M} (\Gamma_*(\widetilde{M}))^\sim \xrightarrow{\beta_{\widetilde{M}}} \widetilde{M}$$

es el morfismo identidad de $\widetilde{M}$.

Demostración. La verificación es local. Sea $\alpha = \alpha_M$, $\beta = \beta_{\widetilde{M}}$, tomamos un abierto $D_+(f)$ con $f \in S_d$ con $d > 0$. Entonces debemos comprobar que el homomorfismo compuesto

$$M_{(f)} \xrightarrow{\alpha_f} (\Gamma_*(\widetilde{M}))_{(f)} \xrightarrow{\beta_f} M_{(f)}$$

es el homomofismo identidad de $M_{(f)}$, donde α_f es el homomorfismo inducido $\frac{m}{f^k} \mapsto \frac{\alpha(m)}{f^k}$ y β_f es el homomorfismo $\frac{z}{f^n} \mapsto (\alpha(f^n)|_{D_+(f)})^{-1}(z|_{D_+(f)})$ definido la Proposición 4.4.8. En efecto, considerando las notaciones de la Proposición 4.4.8, tenemos

$$\begin{aligned}\beta_f(\alpha_f(\frac{m}{f^k})) &= \beta_f(\frac{\alpha(m)}{f^k}) = (\alpha(f^k)|_{D_+(f)})^{-1}(\alpha(m)|_{D_+(f)}) = \psi^f_{-kd}(\frac{1}{f^k})\psi^f_{kd}(\frac{m}{1}) \\ &= \psi^f_0(\frac{m}{f^k}) \equiv \frac{m}{f^k}\,.\end{aligned}$$

De esta manera $\beta_f \circ \alpha_f$ es la identidad en $M_{(f)}$. □

Lema 4.4.10. *Sea X un esquema (resp. un esquema localmente noetheriano). Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ dos $\mathcal{O}_X$-módulos casi coherentes (resp. coherentes), entonces $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ es casi coherente (resp. coherente).*

Demostración. Dado $U = \operatorname{Spec} A$ un abierto afín de X. Por la Proposición 4.2.4, tenemos que $\mathcal{F}|_U \cong \widetilde{M}$ y $\mathcal{G}|_U \cong \widetilde{N}$, donde M y N son A-módulos. Entonces tenemos

$$(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})|_U \cong \mathcal{F}|_U \otimes_{\mathcal{O}_X|_U} \mathcal{G}|_U \cong \widetilde{M} \otimes_{\widetilde{A}} \widetilde{N} \cong (M \otimes_A N)\tilde{}\,.$$

Por la Proposición 4.2.4, se sigue $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ es casi coherente. Supongamos ahora que X es localmente noetheriano, entonces por el Teorema 3.4.2 el anillo A es noheteriano y por la Proposición 4.2.4 los A-módulos M y N son finitamente generados, por tanto $M \otimes_A N$ es finitamente generado y se sigue que $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ es coherente. □

Lema 4.4.11. *Sea S un anillo graduado y $X = \operatorname{Proj} S$. Consideremos un elemento homogéneo $f \in S_d$ con $d > 0$ y sea $\tilde{f} \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(d))$ tal que $\tilde{f}(\mathfrak{p}) = f/1$ para todo $\mathfrak{p} \in X$. Entonces para el haz inversible $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(d)$ tenemos que $X_{\tilde{f}} = D_+(f)$.*

Demostración. Puesto que X es cubierto por los abiertos $D_+(g)$ con $g \in S_1$, entonces es suficiente probar que $X_{\tilde{f}} \cap D_+(g) = D_+(f) \cap D_+(g)$ para todo $g \in S_1$. Sea $\mathfrak{m}_\mathfrak{p}$ el ideal maximal de $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}$; puesto que $\mathcal{L}_\mathfrak{p} = S(d)\tilde{}_\mathfrak{p} \cong S(d)_{(\mathfrak{p})}$ y $\mathfrak{m}_\mathfrak{p} \cong \mathfrak{p}S_{(\mathfrak{p})}$ se sigue que $\mathfrak{m}_\mathfrak{p}\mathcal{L}_\mathfrak{p} \cong \mathfrak{p}S(d)_{(\mathfrak{p})}$, y la condición $\tilde{f}_\mathfrak{p} \notin \mathfrak{m}_\mathfrak{p}\mathcal{L}_\mathfrak{p}$ equivale a que $f/1 \notin \mathfrak{p}S(d)_{(\mathfrak{p})}$. De esta manera $X_{\tilde{f}} \cap D_+(g)$ es el conjunto de todos los primos $\mathfrak{p} \in D_+(g)$ tal que $f/1 \notin \mathfrak{p}S(d)_{(\mathfrak{p})}$, y es inmediato verificar que este conjunto coincide con $D_+(f) \cap D_+(g)$. □

Proposición 4.4.12. *Sea S un anillo graduado finitamente generado por S_1 como S_0-álgebra y sea $X = \operatorname{Proj} S$. Si $\mathcal{F}$ un haz casi coherente sobre X, entonces el morfismo $\beta_\mathcal{F} \colon \Gamma_*(\mathcal{F})\tilde{} \to \mathcal{F}$ (de la Proposición 4.4.8) es un isomorfismo.*

Demostración. Para mostrar que $\beta_{\mathcal{F}}$ es isomorfismo, basta probar que para todo $f \in S_1$, el homomorfismo $\beta_f \colon M_{(f)} \to \Gamma(D_+(f), \mathcal{F})$ dado por $\frac{z}{f^n} \mapsto (\alpha_S(f^n)|_{D_+(f)})^{-1}(z|_{D_+(f)})$ es un isomorfismo. Para ver la inyectividad consideremos $\frac{z}{f^n} \in M_{(f)}$ tal que $(\alpha_S(f^n)|_{D_+(f)})^{-1}(z|_{D_+(f)}) = 0$, esto implica que $z|_{D_+(f)} = 0$. Como $\mathcal{F}$ es casi coherente, por el Lema 4.4.10, $\mathcal{F}(n)$ es también casi coherente, entonces por el Lema 4.4.11 tenemos que $X_{\tilde{f}} = D_+(f)$. Ahora bien, considerando el haz inversible $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(1)$, podemos aplicar la afirmación (a) de la Proposición 4.3.10 a la sección global z de $\mathcal{F}(n)$ y obtenemos un entero $m > 0$, tal que $f^m z = 0$ es considerado como sección global de $\mathcal{F}(n+m) \cong \mathcal{F}(n) \otimes \mathcal{L}^{\otimes m}$, por tanto $\frac{z}{f^n} = 0$. A continuación veamos la sobreyectividad. Tomemos $t \in \Gamma(D_+(f), \mathcal{F})$, puesto que S es finitamente generado por S_1 como S_0-álgebra, X es cubierto por un número finito de los abiertos afines $D_+(f)$ con $f \in S_1$. Además, si $f, g \in S_1$, los abiertos $D_+(f) \cap D_+(f) = D_+(fg)$ son casi compactos y evidentemente $\mathcal{L}|_{D_+(f)}$ es libre donde $f \in S_1$. Entonces por el ítem (b) de la Proposición 4.3.10 existe un entero $m > 0$ tal que la sección $f^m t \in \Gamma(D_+(f), \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m})$ se extiende a una sección global de $\mathcal{F}(m) \cong \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m}$, es decir, existe un elemento $z \in \Gamma(X, \mathcal{F}(m))$ tal que $z|_{D_+(f)} = f^m t$, donde $f^m t \equiv \alpha_S(f^m)|_{D_+(f)} t$, luego tenemos

$$\beta_f(z/f^m) = (\alpha_S(f^m)|_{D_+(f)})^{-1} z|_{D_+(f)} = (\alpha_S(f^m)|_{D_+(f)})^{-1} \alpha_S(f^m)|_{D_+(f)} t = t$$

así concluimos con la prueba. □

Corolario 4.4.13. *Sea A un anillo. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(a) *Si Y es un subesquema cerrado de $\mathbf{P}^r_A$, entonces existe un ideal homogéneo $I \subseteq S = A[x_0, \ldots, x_r]$ tal que Y es el subesquema cerrado determinado por I, es decir Y es isomorfo a* Proj S/I.

(b) *Un esquema Y sobre* Spec A *es proyectivo si, y sólo si, éste es isomorfo a* Proj S *para algún anillo graduado S con $S_0 = A$, y S finitamente generado por S_1 como S_0-álgebra.*

Demostración. (a). Sea $\mathcal{J}_Y$ el haz ideal de Y sobre $X = \mathbf{P}^r_A$. Puesto que el funtor Γ_* es exacto y $\mathcal{J}_Y$ es un subhaz de $\mathcal{O}_X$, el anillo $\Gamma_*(\mathcal{J}_Y)$ es un submódulo graduado de $\Gamma_*(\mathcal{O}_X)$, y por el Corolario 4.4.6 tenemos $\Gamma_*(\mathcal{O}_X) = S$, de esta manera $\Gamma_*(\mathcal{J}_Y)$ es un ideal homogéneo de S, denotaremos por I a este ideal. Por el Corolario 3.5.2, tenemos una inmersión cerrada $f \colon$ Proj $S/I \to X$ inducido por la proyección $S \to S/I$, además f se factoriza en Proj $S/I \xrightarrow{g} V_+(I) \xrightarrow{j} X$ donde g es un isomorfismo de Proj S/I sobre el subesquema cerrado $V_+(I)$ de X y j es el morfismo inclusión.

Veamos que el haz ideal de $V_+(I)$ es $\tilde{I}$. En efecto, puesto que $f(\text{Proj } S/I) = V_+(I)$ es cerrado en X, tenemos para $\mathfrak{p} \in X$

$$(f_*(\mathcal{O}_{\text{Proj } S/I}))_{\mathfrak{p}} = \begin{cases} \mathcal{O}_{\text{Proj } S/I, \mathfrak{p}/I}\,, & \text{si} \quad \mathfrak{p} \in V_+(I)\,, \\ 0\,, & \text{si} \quad \mathfrak{p} \in X \backslash V_+(I)\,. \end{cases}$$

Luego, para cada $\mathfrak{p} \in V_+(I)$, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (\tilde{I})_{\mathfrak{p}} \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow, no head] & \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow, no head] & (f_*(\mathcal{O}_{\text{Proj } S/I}))_{\mathfrak{p}} \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow, no head] & 0 \\
0 \arrow[r] & I_{(\mathfrak{p})} \arrow[r] & S_{(\mathfrak{p})} \arrow[r] & (S/I)_{(\mathfrak{p}/I)} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{4.4.10}$$

donde la fila inferior es exacta para todo $\mathfrak{p} \in X$. Puesto que $(S/I)_{(\mathfrak{p}/I)} = 0$ para todo $\mathfrak{p} \in X \backslash V_+(I)$, el diagrama (4.4.10) es exacta para todo $\mathfrak{p} \in X$, esto implica que la sucesión

$$0 \to \tilde{I} \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{f^\sharp} f_*(\mathcal{O}_{\text{Proj } S/I}) \to 0$$

es exacta. Puesto que $f = j \circ g$, tenemos por definición $f^\sharp = j_*(g^\sharp) \circ j^\sharp$, luego el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \text{Nuc } j^\sharp \arrow[r] \arrow[d, dashed, Rightarrow, no head] & \mathcal{O}_X \arrow[r, "j^\sharp"] \arrow[d, Rightarrow, no head, "id"'] & j_*(\mathcal{O}_{V_+(I)}) \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow, "j_*(g^\sharp)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \tilde{I} \arrow[r] & \mathcal{O}_X \arrow[r, "f^\sharp"'] & f_*(\mathcal{O}_{\text{Proj } S/I}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, por tanto Nuc $j^\sharp = \tilde{I}$.

Ahora bien, por la Proposición 4.3.7 el haz ideal $\mathcal{J}_Y$ es casi coherente, entonces por la Proposición 4.4.12 tenemos $\mathcal{J}_Y \cong \tilde{I}$, luego por la Proposición 4.3.7 y puesto que $\tilde{I}$ es el haz ideal de $V_+(I)$ tenemos $Y \cong V_+(I)$, siendo $V_+(I) \cong$ Proj S/I, por tanto $Y \cong$ Proj S/I.

(b). Si Y es proyectivo sobre Spec A, por definición tenemos una inmersión cerrada $Y \to \mathbf{P}^r_A$ para algún $r \geq 0$, así Y es isomorfo a un subesquema cerrado de $\mathbf{P}^r_A$. Por la parte (a) Y es isomorfo a Proj S/I donde $S = A[x_0, \ldots, x_r]$, y debido al Corolario 3.5.2 podemos suponer que I está contenido en $S_+ = \bigoplus_{d>0} S_d$. En este caso la aplicación $A \to (S/I)_0 = (A{+}I)/I$ dada por $a \mapsto a{+}I$ es un isomorfismo, en efecto la sobreyectividad es obvia, para la inyectividad supongamos que $a + I = 0 + I$ entonces $a \in I$, esto es cierto siempre que $a = 0$ ya que $I \subseteq S_+$. De esta manera el subanillo $(S/I)_0$ se identifica con A. Luego S/I es un A-álgebra generado por $x_0 + I, \ldots, x_r + I \in (S/I)_1$.

Recíprocamente, si S es un A-álgebra finitamente generado por S_1, entonces existe un homomorfismo sobreyectivo $A[x_0, \ldots, x_r] \to S$, y por la Proposición 3.5.1 tenemos la inmersión cerrada inducida Proj $S \to \mathbf{P}^r_A$, por tanto Proj $S \to$ Spec A es proyectivo. □

Definición 4.4.4. Para cualquier esquema Y, definimos el *haz torcido* $\mathcal{O}(1)$ sobre $\mathbf{P}^r_Y$ como el haz $g^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^r_{\mathbb{Z}}}(1))$, donde $g\colon \mathbf{P}^r_Y = \mathbf{P}^r_{\mathbb{Z}} \times_{\mathbb{Z}} Y \to \mathbf{P}^r_{\mathbb{Z}}$ es morfismo proyección.

Ejemplo 4.4.14. En la definición anterior, si $Y =$ Spec A entonces el haz torcido $\mathcal{O}(1)$ sobre $X = \mathbf{P}^r_Y$ coincide con el haz $\mathcal{O}_X(1)$. En efecto, sean $S = \mathbb{Z}[x_0, .., x_r]$, $T = A[x_0, .., x_r]$;

tenemos $\mathbf{P}^r_Y = \mathbf{P}^r_{\mathbb{Z}} \times_{\mathbb{Z}} \operatorname{Spec} A = \operatorname{Proj} T$ y el morfismo proyección $g\colon \mathbf{P}^r_Y \to \mathbf{P}^r_{\mathbb{Z}}$ es el morfismo inducido del homomorfismo natural

$$\varphi\colon S \to T = S \otimes_{\mathbb{Z}} A \quad \text{dado por} \quad f \mapsto f \otimes 1$$

donde el conjunto abierto U definido en la Proposición 3.5.1 coincide con $\mathbf{P}^r_Y$ ya que $\varphi(S_+)T = T_+$, luego por la Proposición 4.4.3, tenemos $g^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^r_{\mathbb{Z}}}(1)) = \mathcal{O}_X(1)$.

Definición 4.4.5. Sea X un esquema sobre Y. Un haz inversible $\mathcal{L}$ sobre X es *muy amplio* relativo a Y, si existe una inmersión (abierta o cerrada) $i\colon X \to \mathbf{P}^r_Y$ para algún r, tal que $\mathcal{L} \cong i^*(\mathcal{O}(1))$, donde $\mathcal{O}(1)$ es el haz torcido sobre $\mathbf{P}^r_Y$.(Esta definición está dada en Harthorne [6], pag. 120, que es una versión simple de la definición dada en Grothendienk [EGA II, 4.4.2].)

Observación 4.4.6. (a) Consideremos la definición anterior. Si $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo, entonces el haz $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^{\otimes n}$ es denotado por $\mathcal{F}(n)$, donde $n \in \mathbb{Z}$. En particular, si $X = \operatorname{Proj} S$, donde S es un anillo graduado con $S_0 = A$ finitamente generado como A-álgebra por S_1, el haz $\mathcal{F}(n)$ coincide con el haz torcido de $\mathcal{F}$ (ver definición 4.4.2); en efecto, como X es proyectivo sobre A, tenemos una inmersión cerrada $X \to \mathbf{P}^n_A$ inducida por un epimorfismo $A[x_0, .., x_n] \to S$. Luego, si $g\colon \mathbf{P}^n_A \to \mathbf{P}^n_{\mathbb{Z}}$ es el morfismo proyección canónico, entonces por el Ejemplo 4.4.14 y Proposición 4.4.3, tenemos $i^*(g^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^r_{\mathbb{Z}}}(1))) = i^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^r_A}(1)) = \mathcal{O}_X(1)$, luego $\mathcal{O}_X(1)$ es un haz muy amplio sobre X relativo a Spec A y tenemos $\mathcal{O}_X(1)^{\otimes n} = \mathcal{O}_X(n)$, así $\mathcal{F}(n)$ es como en la definición 4.4.2.

(b) Si X un esquema proyectivo sobre un esquema Y, por definición existe una inmersión cerrada $i\colon X \to \mathbf{P}^r_Y$ para algún entero $r > 0$, entonces el haz $i^*(\mathcal{O}(1))$ es muy amplio sobre X relativo a Y, donde $\mathcal{O}(1)$ es el haz torcido sobre $\mathbf{P}^r_Y$.

Definición 4.4.6. Sea X un esquema y sea $\mathcal{F}$ un haz de $\mathcal{O}_X$-módulos. Diremos que $\mathcal{F}$ es *generado por secciones globales*, si existe una familia de secciones globales $\{s_i\}_{i\in I}$ de $\mathcal{F}$ tal que para cada $x \in X$, las imágenes de los elementos s_i en el tallo $\mathcal{F}_x$ generan a este como $\mathcal{O}_x$-módulo.

Observación 4.4.7. En la definición anterior, decir que $\mathcal{F}$ es generado por secciones globales es equivalente a decir que $\mathcal{F}$ puede ser escrito como un cociente de un haz libre. En efecto, las secciones generadores $\{s_i\}_{i\in I}$ definen un morfismo sobreyectivo de haces $\bigoplus_{i\in I} \mathcal{O}_X \to \mathcal{F}$, y recíprocamente.

Ejemplo 4.4.15. Cualquier haz casi coherente $\mathcal{F}$ sobre un esquema afín X, es generado por secciones globales. En efecto, tenemos que $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ donde M es un A-módulo. Dado $\mathfrak{p} \in X$ entonces, la imagen de cualquier conjunto generador de M en $M_{\mathfrak{p}}$, generará $M_{\mathfrak{p}} = \mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$ como A_p-módulo.

Ejemplo 4.4.16. Sea $X = \operatorname{Proj} S$, donde S es un anillo graduado que es generado por S_1 como S_0-álgebra. Entonces los elementos de S_1 son secciones globales de $\mathcal{O}_X(1)$ que lo generan.

Lema 4.4.17. *Si S es un anillo graduado noetheriano, entonces* Proj S *es un esquema noetheriano. En particular, todo esquema proyectivo sobre un anillo noetheriano es noetheriano.*

Demostración. Si S es noetheriano, el ideal S_+ admite un numero finito de generadores homogéneos, digamos $f_1, \ldots, f_r$. Puesto que Proj S es cubierto por los abiertos $D_+(f_i) = \operatorname{Spec} S_{(f_i)}$ para $i = 1, \ldots, r$, y cada $S_{(f_i)}$ es un anillo noetheriano, se sigue que Proj S es noetheriano. Ahora si X es un esquema proyectivo sobre un anillo noetheriano A, entonces por el Corolario 4.4.13, X es isomorfo a Proj S, donde S es un anillo graduado con $S_0 = A$ y es finitamente generado por S_1 como S_0-álgebra, de donde se tiene que S es un anillo noetheriano, y por lo anterior $X \cong$ Proj S es noetheriano. □

Lema 4.4.18. *Sea $f\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ un morfismo de espacios anillados. Para cualquier $\mathcal{O}_X$-módulo $\mathcal{F}$ y cualquier $\mathcal{O}_Y$-módulo $\mathcal{E}$ localmente libre, existe un morfismo natural*

$$f_*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} f^*\mathcal{E}) .$$

Demostración. Primeramente consideremos el caso $\mathcal{E} = \mathcal{O}_Y^n$. Entonces, por un lado tenemos

$$f_*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{E} = f_*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Y^n \cong \oplus_{i=1}^n (f_*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Y) \cong \oplus_{i=1}^n f_*\mathcal{F} .$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{E} &= \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*(\mathcal{O}_Y^n) \cong \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} (f^{-1}(\mathcal{O}_Y^n) \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X) \\ &\cong \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} ((f^{-1}\mathcal{O}_Y)^n \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X) \\ &\cong \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} (\oplus_{i=1}^n f^{-1}\mathcal{O}_Y \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X) \\ &\cong \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{O}_X^n) \cong (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X)^n \\ &\cong \mathcal{F}^n \end{aligned}$$

Luego, $f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{E}) \cong f_*(\mathcal{F}^n) = f_*(\oplus_{i=1}^n \mathcal{F}) = \oplus_{i=1}^n f_*\mathcal{F} \cong f_*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{E}$. En general, tomamos un cubrimiento abierto $\{V_i\}_{i \in I}$ de Y tal que $\mathcal{E}|_{V_i}$ sea libre de rango n. Luego para cada $i \in I$, tomamos $U_i = f^{-1}(V_i)$ y denotamos por $f_i\colon U_i \to V_i$ a la restricción de f, entonces

$$(f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{E}))|_{V_i} \cong (f_i)_*((\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{E})|_{U_i}) \cong (f_i)_*(\mathcal{F}|_{U_i} \otimes_{\mathcal{O}_{U_i}} (f_i)^*(\mathcal{E}|_{V_i})) .$$

Por la parte anterior la última expresión es isomorfo a $(f_i)_*(\mathcal{F}|_{U_i}) \otimes_{\mathcal{O}_{V_i}} \mathcal{E}|_{V_i}$ y por otro lado $(f_i)_*(\mathcal{F}|_{U_i}) \otimes_{\mathcal{O}_{V_i}} \mathcal{E}|_{V_i} \cong (f_*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{E})|_{V_i}$, entonces

$$(f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{E}))|_{V_i} \cong (f_*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{E})|_{V_i} .$$

Luego podemos chequear sin dificultad que $\mathcal{E}|_{V_i \cap V_j}$ es libre para todo i, j, y el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} (f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{E}))|_{V_i} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d] & (f_*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{E})|_{V_i} \arrow[d] \\ (f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{E}))|_{V_i \cap V_j} \arrow[r, Rightarrow] & (f_*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{E})|_{V_i \cap V_j} \end{tikzcd}$$

Entonces por pegamiento de isomorfismos (lema 3.1.25), obtenemos un isomorfismo $f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} f_*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{E}$.

□

Teorema 4.4.19 (Serre)**.** *Sea X un esquema proyectivo sobre un anillo noetheriano A, sea $\mathcal{O}(1)$ un haz inversible muy amplio sobre X y sea $\mathcal{F}$ un haz de $\mathcal{O}_X$-módulo coherente . Entonces existe un entero n_0 tal que para todo $n \geq n_0$, el haz $\mathcal{F}(n)$ puede ser generado por un un número finito de secciones globales.*

Demostración. Sea $i\colon X \to \mathbf{P}^r_A$ una inmersión cerrada de X en un espacio proyectivo sobre A tal que $i^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^r_A}(1)) = \mathcal{O}(1)$. Por el Lema 4.4.17, tanto $\mathbf{P}^r_A$ como X son esquemas noetherianos, entonces por la Proposición 4.3.4, el morfismo i es finito y el haz $i_*\mathcal{F}$ es coherente sobre $\mathbf{P}^r_A$. Por otro lado, por el Lema 4.4.18 tenemos

$$i_*(\mathcal{F}(n)) = i_*(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}(1)^{\otimes n}) = i_*(\mathcal{F} \otimes i^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^r_A}(n))) \cong i_*\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^r_A}(n) = (i_*\mathcal{F})(n)$$

así $i_*(\mathcal{F}(n)) \cong (i_*\mathcal{F})(n)$. Puesto que i es una inmersión cerrada, $i(X)$ es un subconjunto cerrado de $\mathbf{P}^r_A$, luego para $\mathfrak{q} \in \mathbf{P}^r_A$ tenemos

$$(i_*(\mathcal{F}(n))_{\mathfrak{q}} = \begin{cases} \mathcal{F}(n)_{\mathfrak{p}}\,, & \text{si} \quad \mathfrak{q} = i(\mathfrak{p}) \in i(X)\,, \\ 0\,, & \text{si} \quad \mathfrak{p} \notin i(X)\,. \end{cases}$$

Se sigue que $\mathcal{F}(n)$ es generado por secciones globales si, y sólo si, $i_*(\mathcal{F}(n))$ es generado por secciones globales. De esta manera el teorema queda reducido al caso $X = \mathbf{P}^r_A = \operatorname{Proj} S$, donde $S = A[x_0, \ldots, x_r]$, y el haz muy amplio sobre X es el haz torcido de Serre $\mathcal{O}_X(1)$. Entonces X es cubierto por los abiertos $D_+(x_i)$ con $i = 0, .., r$, luego como $\mathcal{F}$ es coherente, para cada i, existe un módulo finitamente generado M_i sobre $B_i = S_{(x_i)}$ tal que $\mathcal{F}|_{D_+(x_i)} = \widetilde{M_i}$ (Proposición 4.2.4). Sean s_{ij} dichos generadores en M_i. Por el Corolario 4.4.6 tenemos que $S_1 = \Gamma(X, \mathcal{O}_X(1))$, y como $x_i \in S_1$ para todo i, los elementos x_i son considerados como secciones globales de $\mathcal{O}_X(1)$. Luego, por la Proposición 4.3.10, para cada sección $s_{ij} \in M_i = \Gamma(D_+(x_i), \mathcal{F})$, existe un entero n (que depende de i, j) tal que $x_i^n s_{ij}$ se extiende a una sección global t_{ij} de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(1)^n = \mathcal{F}(n)$. Como hay una cantidad finita de términos s_{ij} podemos conseguir que n no dependa de i, j, asumamos pues que n es independiente de i, j. Por el Lema 4.4.10, $\mathcal{F}(n)$ es casi coherente, entonces para cada i, existe un B_i-módulo $\widetilde{M'_i}$ tal que $\mathcal{F}(n)|_{D_+(x_i)} = \widetilde{M'_i}$, luego tenemos

$$\begin{aligned} \widetilde{M'_i} &= \mathcal{F}(n)|_{D_+(x_i)} = (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n))|_{D_+(x_i)} \\ &\cong \mathcal{F}|_{D_+(x_i)} \otimes_{\mathcal{O}_X|_{D_+(x_i)}} \mathcal{O}_X(n)|_{D_+(x_i)} \\ &\cong \widetilde{M_i} \otimes_{\widetilde{S_{(x_i)}}} S(n)^{\sim}_{(x_i)} \\ &\cong (M_i \otimes_{S_{(x_i)}} S(n)_{(x_i)})^{\sim}\,, \end{aligned}$$

así $M'_i \cong M_i \otimes_{S_{(x_i)}} S(n)_{(x_i)}$. Por otro lado el homomorfismo $x_i^n\colon M_i \to M_i \otimes_{S_{(x_i)}} S(n)_{(x_i)}$ dado por $m \mapsto m \otimes \frac{x_i^n}{1}$ es un isomorfismo, cuyo inverso es el homomorfismo dado por la aplicación $m \otimes \frac{f}{x_i^k} \mapsto \frac{f}{x_i^{k+n}} m$. Entonces $M'_i \cong M_i$, luego, como los elementos s_{ij} generan M_i, los elementos $x_i^n s_{ij}$ generan $M'_i = \Gamma(D_+(x_i), \mathcal{F}(n))$ siendo $x_i^n s_{ij} = t_{ij}|_{D_+(x_i)}$ para todo i, j. Esto implica que el conjunto $\{t_{ij}\}_{i,j}$ es un generador global de $\mathcal{F}(n)$. $\square$

Corolario 4.4.20. *Sea X un esquema proyectivo sobre un anillo noetheriano A. Entonces cualquier haz casi coherente $\mathcal{F}$ sobre X puede ser escrito como un cociente de un haz $\mathcal{E}$, donde $\mathcal{E}$ es una suma directa finita haces torcidas $\mathcal{O}(n_i)$ donde $n_i \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. Por el Teorema 4.4.19, existe un entero n tal que $\mathcal{F}(n)$ es generado por un número finito de secciones globales. Entonces tenemos un morfismo sobreyectivo $\bigoplus_{i=1}^{N} \mathcal{O}_X \to \mathcal{F}(n)$. Tensorizando con $\mathcal{O}_X(-n)$ obtenemos un morfismo $\bigoplus_{i=1}^{N} \mathcal{O}_X(-n) \to \mathcal{F}$ como queremos. □

Corolario 4.4.21. *Sea S un anillo graduado noetheriano finitamente generado por S_1 como un S_0-álgebra y sea $X = \operatorname{Proj} S$. Si $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo coherente, entonces existe un entero $n_0 > 0$ tan que $\mathcal{F}(n)$ es generado por un número finito de secciones globales para todo $n \geq n_0$.*

Demostración. Puesto que S es un S_0-álgebra de tipo finito, existe un epimorfismo $S_0[x_0, \ldots, x_r] \to S$ de S_0-álgebras con $r \geq 0$. Por (c) de la Proposición 3.5.1, el morfismo inducido Proj $S \to \mathbf{P}^r_{S_0}$ es una inmersión cerrada, y por tanto Proj $S \to$ Spec S_0 es proyectivo, luego se aplica el teorema anterior. □

Observación 4.4.8. Sea $\mathcal{F}$ un haz de módulos sobre X, entonces para todo $n \in \mathbb{Z}$, tenemos el isomorfismo $\Gamma_*(\mathcal{F}(n)) \cong \Gamma_*(\mathcal{F})(n)$. En efecto,

$$\Gamma_*(\mathcal{F}(n)) \cong \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} \Gamma(X, \mathcal{F}(n)(m)) \cong \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} \Gamma(X, \mathcal{F}(n+m)) \cong \Gamma_*(\mathcal{F})(n)\,.$$

Lema 4.4.22. *Sea $\varphi\colon S \to T$ un homomorfismo graduado sobreyectivo de anillos graduados y sea $f\colon \operatorname{Proj} T \to \operatorname{Proj} S$ la inmersión cerrada inducida. Si N es un T-módulo, entonces $\Gamma_*(({}_SN)^\sim) \cong {}_S\Gamma_*(\tilde{N})$.*

Demostración. Sea $X = \operatorname{Proj} S$ y $Y = \operatorname{Proj} T$. Usando los isomorfismos canónicos $({}_SN)^\sim(n) \cong ({}_SN(n))^\sim$, $(N(n))^\sim \cong \tilde{N}(n)$ y la parte (c) de la Proposición 4.4.3 tenemos

$$\begin{aligned}\Gamma_*(({}_SN)^\sim) &\cong \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \Gamma(X, ({}_SN)^\sim(n)) \cong \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \Gamma(X, f_*(\tilde{N}(n)))\\ &= \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \Gamma(Y, \tilde{N}(n)) \cong \Gamma_*(\tilde{N})\,,\end{aligned}$$

donde $\Gamma_*(({}_SN)^\sim)$ es un S-módulo y $\Gamma_*(\tilde{N})$ es un T-módulo. Entonces, gracias al homomorfismo $\varphi\colon S \to T$ inducido por f, se deduce un isomorfismo $\Gamma_*(({}_SN)^\sim) \cong {}_S\Gamma_*(\tilde{N})$. □

En lo que sigue, un anillo graduado S será un anillo graduado finitamente generado por S_1 como A-álgebra, donde $A = S_0$.

Lema 4.4.23. *Sea k un cuerpo, S un anillo graduado sin divisores de cero, donde S_0 es un k-álgebra finitamente generado, y sea $X = \operatorname{Proj} S$. Entonces $\Gamma_*(\mathcal{O}_X(n))$ es S-módulo graduado de tipo casi finito para todo $n \in \mathbb{Z}$*

Demostración. Primero probemos que $\Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ es un S-módulo graduado de tipo casi finito. Como S es dominio, la condición $S_+ = 0$ es equivalente a que $\operatorname{Proj} S = \emptyset$. Por lo cual asumimos que $S_+ \neq 0$, y por la Proposición 4.4.7 S puede ser considerado como subanillo de $S' = \bigoplus_{n\geq 0} \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n))$ y como S es noetheriano, S' es integral sobre S y está contenido en Q, el cuerpo de fracciones de S. Para probar que $\Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ es un módulo de tipo casi finito sobre S, por definición, basta probar que S' es un módulo finitamente generado sobre S. De la hipótesis tenemos que el dominio integral S es un álgebra finitamente generado sobre el cuerpo k, además por la Proposición 2.2.9, S es un anillo noetheriano. Entonces por la Proposición 4.4.7 tenemos las inclusiones $S \subseteq S' \subseteq C \subseteq Q$, donde C es la clausura integral de S en el cuerpo de fracciones Q de S, luego por el Teorema 2.2.16, C es un S-módulo finitamente generado, y puesto que S es noetheriano, C es un S-módulo noetheriano, por tanto S' es un S-módulo finitamente generado, tal como queríamos probar.

Ahora sea $n \in \mathbb{Z}$, por la Observación 4.4.8 tenemos el isomorfismo $\Gamma_*(\mathcal{O}_X(n)) \cong \Gamma_*(\mathcal{O}_X)(n)$, luego por la parte anterior y el Lema 2.2.13, resulta que $\Gamma_*(\mathcal{O}_X(n))$ es un S-módulo graduado de tipo casi finito. $\square$

Corolario 4.4.24. *Sea k un cuerpo, S un anillo graduado, donde S_0 es un k-álgebra finitamente generado y sea $X = \operatorname{Proj} S$. Si $\mathfrak{p}$ un ideal primo homogéneo de S, entonces $\Gamma_*((S/\mathfrak{p})(n)^\sim)$ es un S-módulo graduado de tipo casi finito para todo $n \in \mathbb{Z}$*

Demostración. Si $\mathfrak{p}$ un ideal primo homogéneo de S, entonces $T = S/\mathfrak{p}$ es un dominio graduado finitamente generado por T_1 como T_0-álgebra, y T_0 es un k-álgebra finitamente generado. Sea $f\colon \operatorname{Proj} T \to \operatorname{Proj} S$ la inmersión cerrada inducida por el epimorfismo canónico $\varphi\colon S \to T$. Ahora, si $n \in \mathbb{Z}$, entonces $(S/\mathfrak{p})(n)^\sim(n)$ puede ser considerado como un S-módulo graduado, luego si $Y = \operatorname{Proj} T$, por el Lema 4.4.22 tenemos

$$\Gamma_*((S/\mathfrak{p})(n)^\sim) = \Gamma_*({}_S T(n)^\sim) \cong {}_S\Gamma_*(T(n)^\sim) = {}_S\Gamma_*(\mathcal{O}_Y(n)) .$$

Por el lema anterior, $\Gamma_*(\mathcal{O}_Y(n))$ es un T-módulo graduado de tipo casi finito, y puesto que φ es sobreyectiva, el módulo inducido ${}_S\Gamma_*(\mathcal{O}_Y(n))$ es de tipo casi finito, así $\Gamma_*((S/\mathfrak{p})(n)^\sim)$ es un S-módulo graduado de tipo casi finito. $\square$

Proposición 4.4.25. *Sea S un anillo graduado, $X = \operatorname{Proj} S$. Entonces para todo entero $d \geq 0$, existe un isomorfismo canónico $\psi_d^M\colon M\{d\}^\sim \to \widetilde{M}$ tal que si $\varphi\colon M \to N$ es un homomorfismo de S-módulos graduados, el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd}
M\{d\}^\sim \arrow[r, "\varphi\{d\}^\sim"] \arrow[d, Rightarrow, "\psi_d^M"'] & N\{d\}^\sim \arrow[d, Rightarrow, "\psi_d^N"] \\
\widetilde{M} \arrow[r, "\widetilde{\varphi}"'] & \widetilde{N}
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Demostración. Sea $f \in S_1$ y $d \geq 0$, definimos un homomorfismo de $S_{(f)}$-módulos $\psi_f^M\colon M\{d\}_{(f)} \to M_{(f)}$ dado por $m/f^k \mapsto m/f^{k+d}$. Este es un isomorfismo con inversa

$m/f^k \mapsto f^d m/f^k$. Si $g \in S_1$ es otro elemento, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
M\{d\}_{(f)} \arrow[r, Rightarrow, "\psi_f^M"] \arrow[d] & M_{(f)} \arrow[d] \\
M\{d\}_{(fg)} \arrow[r, Rightarrow, "\psi_{fg}^M"'] & M_{(fg)}
\end{tikzcd}$$

por tanto tenemos un isomorfismo de haces $\psi_d^M\colon M\{d\}^\sim \to \widetilde{M}$. Por otro lado, un homomorfismo $\varphi\colon M \to N$ induce un homomorfismo $\varphi_{(f)}\colon M_{(f)} \to N_{(f)}$ dado por $m/f^k \mapsto \varphi(m)/f^k$ y un homomorfismo $\varphi\{d\}_{(f)}\colon M\{d\}_{(f)} \to N\{d\}_{(f)}$ dado por la misma aplicación. Luego tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
M\{d\}_{(f)} \arrow[r, "\varphi\{d\}_{(f)}"] \arrow[d, Rightarrow, "\psi_f^M"'] & N\{d\}_{(f)} \arrow[d, Rightarrow, "\psi_f^N"] \\
M_{(f)} \arrow[r, "\varphi_{(f)}"'] & N_{(f)}
\end{tikzcd}$$

para todo $f \in S_1$. Por tanto tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
M\{d\}^\sim \arrow[r, "\varphi\{d\}^\sim"] \arrow[d, Rightarrow, "\psi_d^M"'] & N\{d\}^\sim \arrow[d, Rightarrow, "\psi_d^N"] \\
\widetilde{M} \arrow[r, "\widetilde{\varphi}"'] & \widetilde{N}
\end{tikzcd}$$

$\square$

Proposición 4.4.26. *Sea S un anillo graduado, $X = \operatorname{Proj} S$ y sean M, N dos S-módulos graduados. Se cumplen:*

(a) *Si $M \approx N$, entonces $\widetilde{M} \cong \widetilde{N}$ como $\mathcal{O}_X$-módulos.*

(b) *Si $\varphi\colon M \to N$ un casi isomorfismo entre dos S-módulos graduados, entonces $\widetilde{\varphi}\colon \widetilde{M} \to \widetilde{N}$ es un isomorfismo de $\mathcal{O}_X$-módulos.*

Demostración. (a). Si $M \approx N$, existe un isomorfismo $\varphi\colon M\{d\} \cong N\{d\}$ para algún d, luego tenemos un isomorfismo $\widetilde{\varphi}\colon M\{d\}^\sim \cong N\{d\}^\sim$. Por la proposición anterior tenemos

$$\widetilde{M} \cong M\{d\}^\sim \cong N\{d\}^\sim \cong \widetilde{N}$$

(b). Si $\varphi\colon M \to N$ un casi isomorfismo, existe un entero $d \geq 0$ tal que $\varphi\{d\}\colon M\{d\} \to N\{d\}$ es un isomorfismo, aplicando el funtor $\widetilde{\ }$ tenemos el isomorfismo de haces $\varphi\{d\}^{\sim}\colon M\{d\}^{\sim} \to N\{d\}^{\sim}$. Luego, del diagrama conmutativo de la proposición anterior, se sigue que $\widetilde{\varphi}$ es un isomorfismo. □

Corolario 4.4.27. *Sea S un anillo graduado, $X = \operatorname{Proj}\ S$ y sea M un S-módulo graduado de tipo casi finito. Entonces*

(a) $M \approx 0$ *si y sólo si* $\widetilde{M} = 0$.

(b) *Si S es noetheriano, entonces $\widetilde{M}$ es un haz coherente.*

Demostración. (a). Si $M \approx 0$, por (a) de la Proposición 4.4.26, tenemos $\widetilde{M} = 0$. Recíprocamente, como M es de tipo casi finito, por (c) del Lema 2.2.13, $M \approx N$ para algún S-módulo N de tipo finito, y por la Proposición 4.4.26, luego $0 = \widetilde{M} \cong \widetilde{N}$. Entonces $N_(\mathfrak{p})$ para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj}\ S$ y por (b) de la Proposición 2.3.11, $N \approx 0$, y por transitividad tenemos $M \approx 0$.

(b). Como el caso anterior, $M \approx N$ para algún S-módulo N de tipo finito. Por la Proposición 4.4.1, $\widetilde{N}$ es coherente, y por la Proposición 4.4.26, $\widetilde{M} \cong \widetilde{N}$, por lo que $\widetilde{M}$ es coherente. □

Corolario 4.4.28. *Sea S un anillo graduado noetheriano, $X = \operatorname{Proj}\ S$ y sea $\varphi\colon M \to N$ un homomorfismo de S-módulos graduados de tipo casi finito. Entonces φ es un casi isomorfismo si y sólo si $\widetilde{\varphi}\colon \widetilde{M} \to \widetilde{N}$ es un isomorfismo.*

Demostración. Si $\widetilde{\varphi}$ es un isomorfismo, entonces $(\operatorname{Nuc}\varphi)^{\sim} = \operatorname{Nuc}\widetilde{\varphi} = 0$ y $(\operatorname{Conuc}\ \varphi)^{\sim} = \operatorname{Conuc}\widetilde{\varphi} = 0$, por puesto que S es notheriano, por el Lema 2.2.14, $\operatorname{Nuc}\varphi$ y $\operatorname{Conuc}\ \varphi$ son de tipo casi finito, luego por la Proposición 4.4.27, $\operatorname{Nuc}\varphi \approx 0$ y $\operatorname{Conuc}\varphi \approx 0$, así φ es un casi isomorfismo por el Lema 2.2.15. La Proposición 4.4.26 nos proporciona la reciproca. □

Proposición 4.4.29. *Sea k un cuerpo, S un anillo graduado, donde S_0 es un k-álgebra finitamente generado, y sea $X = \operatorname{Proj} S$. Si $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo coherente, entonces $\Gamma_*(\mathcal{F})$ es un S-módulo graduado de tipo casi finito.*

Demostración. De la Proposición 2.2.9, S es un anillo noetheriano. Por el Corolario 4.4.21, existe un entero $n > 0$, tal que $\mathcal{F}(n)$ es generado por un número finito de secciones globales, estos elementos son homogéneos de grado n del módulo graduado $\Gamma_*(\mathcal{F})$. Sea M el S-submódulo de $\Gamma_*(\mathcal{F})$ generado por dichos elementos y sea $i\colon M \to \Gamma_*(\mathcal{F})$ el homomorfismo inclusión. Luego, como el funtor $\widetilde{\ }$ es exacto, tenemos el morfismo inyectivo $\widetilde{i}\colon \widetilde{M} \hookrightarrow \Gamma_*(\mathcal{F})^{\sim}$ y como $\mathcal{F}$ es coherente, por la Proposición 4.4.12 tenemos el isomorfismo $\beta_{\mathcal{F}}\colon \Gamma_*(\mathcal{F})^{\sim} \to \mathcal{F}$. La composición de estos dos morfismos nos da un morfismo inyectivo $\phi\colon \widetilde{M} \hookrightarrow \mathcal{F}$, entonces el morfismo $\phi(n)\colon \widetilde{M}(n) \to \mathcal{F}(n)$ es sobreyectivo porque lo es en los tallos, luego torciendo por $-n$, tenemos que ϕ es un isomorfismo, por tanto $\Gamma_*(\mathcal{F}) \cong \Gamma_*(\widetilde{M})$. De esta manera, la proposición queda reducida a probar que, si M es un S-módulo graduado finitamente generado entonces $\Gamma_*(\widetilde{M})$ es de tipo casi finito. Si $M = 0$ el resultado es trivial, entonces asumimos que $M \neq 0$. Entonces por el Teorema 2.2.17, existe una filtración finita de M por submódulos graduados

$$0 = M^0 \subset M^1 \subset \cdots \subset M^r = M\,,$$

tal que para cada i, tenemos un isomorfismo de S-módulos graduados $M^i/M^{i-1} \cong (S/\mathfrak{p}_i)(n_i)$ para ciertos ideales primos homogéneos $\mathfrak{p}_i$ y enteros n_i. Luego para cada i, tenemos la suceción exacta

$$0 \to M^{i-1} \to M^i \to (S/\mathfrak{p}_i)(n_i) \to 0\,,$$

y puesto que el funtor $\widetilde{\cdot}$ es exacto, la sucesión

$$0 \to (M^{i-1})^{\sim} \to (M^i)^{\sim} \to (S/\mathfrak{p}_i)(n_i)^{\sim} \to 0$$

es exacta, además como el funtor Γ_* es exacto a izquierda (Observación 4.4.5), tenemos la sucesión exacta

$$0 \to \Gamma_*(M^{i-1\sim}) \to \Gamma_*(M^{i\sim}) \xrightarrow{\psi_i} \Gamma_*((S/\mathfrak{p}_i)(n_i)^{\sim})\,.$$

A continuación veamos por inducción, que $\Gamma_*(M^{\sim})$ es de tipo casi finito. Si $i = 1$ tenemos $M^1 \cong (S/\mathfrak{p}_1)(n_1)$, luego $\Gamma_*(M^{1\sim}) \cong \Gamma_*((S/\mathfrak{p}_1)(n_1)^{\sim})$ que es de tipo casi finito por el Corolario 4.4.24. Supongamos que $\Gamma_*(M^{i-1\sim})$ es de tipo casi finito para $i > 1$; como $\Gamma_*((S/\mathfrak{p}_i)(n_i)^{\sim})$ es de tipo casi finito y S es noetheriano, por el Lema 2.2.14, Im ψ_i es un S-submódulo graduado de tipo casi finito, luego considerando la sucesión exacta

$$0 \to \Gamma_*(M^{i-1\sim}) \to \Gamma_*(M^{i\sim}) \to \mathrm{Im}\ \psi_i \to 0$$

y la hipótesis inductiva, tenemos que $\Gamma_*(M^{i\sim})$ es de tipo casi finito. Luego obtenemos lo deseado tomando $i = r$. De esta manera probamos que $\Gamma_*(\mathcal{F})$ es casi finitamente generado. □

Corolario 4.4.30. *Sea k un cuerpo, S un anillo graduado, donde S_0 es un k-álgebra finitamente generado, y sea $X = \operatorname{Proj} S$. Si M es un S-módulo módulo graduado de tipo casi finito, entonces $\alpha_M \colon M \to \Gamma_*(\widetilde{M})$ es un casi isomorfismo, esto es, existe un entero $d \geq 0$ tal que para todo $n \geq d$, $\alpha_n \colon M_n \to \Gamma(\widetilde{M}(n))$ es un isomorfismo, o alternativamente, existe un entero $d \geq 0$ tal que $\alpha_M\{d\} \colon M\{d\} \to \Gamma_*(\widetilde{M})\{d\}$ es un isomorfismo.*

Demostración. Como S es noetheriano, por la Proposición 4.4.27, $\widetilde{M}$ es un haz coherente, y por la Proposición 4.4.29, $\Gamma_*(\widetilde{M})$ es un S-módulo graduado de tipo casi finito. Luego por el Corolario 4.4.28, mostrar que α_M es un casi isomorfismo es equivalente que $\widetilde{\alpha_M}$ sea un isomorfismo. Por la Proposición 4.4.12 tenemos el isomorfismo $\beta_{\widetilde{M}} \colon \Gamma_*(\widetilde{M})^{\sim} \to \widetilde{M}$ y por la Proposición 4.4.9, $\beta_{\widetilde{M}} \circ \widetilde{\alpha_M}$ es el morfismo identidad, esto implica que $\widetilde{\alpha_M}$ es un isomorfismo como deseamos. □

Corolario 4.4.31. *Sea k un cuerpo, sea A una k-álgebra finitamente generada, sea X un esquema proyectivo sobre A, y sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo coherente. Entonces $\Gamma(X, \mathcal{F})$ es un A-módulo finitamente generado. En particular, si $A = k$, entonces $\Gamma(X, \mathcal{F})$ es un k-espacio vectorial de dimensión finita.*

Demostración. Consideremos $X = \operatorname{Proj} X$, donde S es un anillo graduado finitamente generado por S_1 como un S_0-álgebra y $S_0 = A$. Por la Proposición 4.4.29, $M = \Gamma_*(\mathcal{F})$ es un S-módulo de tipo casi finito, y por el Lema 2.2.12 $M\{d\}$ es S-módulo finitamente generado para todo $d \geq 0$, en particular $M\{0\}$ es finitamente generado, luego por el Lema 2.2.8 $M_0 = \Gamma(X, \mathcal{F})$ es A-módulo finitamente generado. □

Definición 4.4.7. Sean S un anillo graduado y $X = \operatorname{Proj} S$. Definimos la categoría $\mathbf{ModGrcf}(S)/\approx$ de los S-módulos graduados de tipo casi finito módulo la relación $\approx$, de la siguiente manera: un objeto de esta categoría es una clase $[M]$ dada por la relación de equivalencia $\approx$, donde M es un S-módulo graduados de tipo casi finito. Un morfismo $[\varphi]\colon [M] \to [N]$ es una clase de homomorfismos graduados dada por la siguiente relación de equivalencia: $\varphi\colon M \to N$ y $\varphi'\colon M' \to N'$ son equivalentes si, y sólo si, existen un entero $d \geq 0$ y dos isomorfismos $M\{d\} \xrightarrow{\sim} M'\{d\}$ y $N\{d\} \xrightarrow{\sim} N'\{d\}$ tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
M\{d\} \arrow[r, "\varphi\{d\}"] \arrow[d, Rightarrow] & N\{d\} \arrow[d, Rightarrow] \\
M'\{d\} \arrow[r, "\varphi'\{d\}"'] & N'\{d\}
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Definimos la composición como $[\varphi] \circ [\varphi'] := [\varphi \circ \varphi']$ y la identidad, $\mathrm{id}_{[M]} := [\mathrm{id}_M]$.

Asimismo, definimos la categoría $\mathfrak{Coh}(X)/\cong$ de $\mathcal{O}_X$-módulos coherentes módulo isomorfismo, de la siguiente manera: un objeto de esta categoría es una clase $[\mathcal{F}]$ dada por la relación de isomorfismo $\cong$, donde $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo coherente. Un morfismo $[\phi]\colon [\mathcal{F}] \to [\mathcal{G}]$ de esta categoría, es una clase de morfismos de $\mathcal{O}_X$-módulos coherentes dada por la siguiente relación de equivalencia: $\phi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ y $\phi'\colon \mathcal{F}' \to \mathcal{G}'$ son equivalentes si, y sólo si, existen dos isomorfismos $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}'$ y $\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}'$ tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, Rightarrow] & \mathcal{G} \arrow[d, Rightarrow] \\
\mathcal{F}' \arrow[r, "\phi'"'] & \mathcal{G}'
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Definimos la composición como $[\phi] \circ [\phi'] := [\phi \circ \phi']$ y la identidad, $\mathrm{id}_{[\mathcal{F}]} := [\mathrm{id}_{\mathcal{F}}]$.

El teorema siguiente es el principal resultado de este trabajo.

Teorema 4.4.32 (Correspondencia proyectiva de Serre)**.** *Sea k un cuerpo, S un anillo graduado, donde S_0 es un k-álgebra finitamente generado y sea $X = \operatorname{Proj} S$. Los funtores $\widetilde{\ }$ y Γ_* inducen una equivalencia de categorías entre* $\mathbf{ModGrcf}(S)/\approx$ *y* $\mathfrak{Coh}(X)/\cong$.

Demostración. Si M es un S-módulo graduado de tipo casi finito entonces $\widetilde{M}$ es un haz coherente sobre X (Corolario 4.4.27), y si $\mathcal{F}$ es un haz coherente sobre X, entonces $\Gamma_*(\mathcal{F})$ es un S-módulo graduado de tipo casi finito (Proposición 4.4.29).

Veamos a continuación que el funtor $\widetilde{\ }$ induce un funtor

$$\mathbf{ModGrcf}(S)/\approx \;\to\; \mathfrak{Coh}(X)/\cong .$$

Sean M, M' dos S-módulos graduados de tipo casi finito, si $M \approx M'$ entonces $\widetilde{M} \cong \widetilde{M'}$ (Proposición 4.4.26), esto nos da una aplicación $[M] \mapsto [\widetilde{M}]$. Por otro lado, si $\varphi\colon M \to N$ y $\varphi'\colon M' \to N'$ son dos homomorfismos de S-módulos graduados de tipo casi finito equivalentes, entonces tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
M\{d\} \arrow[r, "\varphi\{d\}"] \arrow[d, Rightarrow] & N\{d\} \arrow[d, Rightarrow] \\
M'\{d\} \arrow[r, "\varphi'\{d\}"'] & N'\{d\}
\end{tikzcd} \tag{4.4.11}$$

donde d es un entero no negativo y las flechas verticales son isomorfismo de módulos graduados. Por la prop. 4.4.25 tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
M\{d\}^{\sim} \arrow[r, "\varphi\{d\}^{\sim}"] \arrow[d, Rightarrow] & N\{d\}^{\sim} \arrow[d, Rightarrow] \\
\widetilde{M} \arrow[r, "\widetilde{\varphi}"'] & \widetilde{N}
\end{tikzcd} \tag{4.4.12}$$

$$\begin{tikzcd}
M'\{d\}^{\sim} \arrow[r, "\varphi'\{d\}^{\sim}"] \arrow[d, Rightarrow] & N'\{d\}^{\sim} \arrow[d, Rightarrow] \\
\widetilde{M'} \arrow[r, "\widetilde{\varphi'}"'] & \widetilde{N'}
\end{tikzcd} \tag{4.4.13}$$

Luego juntando los diagramas (4.4.11),(4.4.12) y (4.4.13) tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{M} \arrow[r, "\widetilde{\varphi}"] \arrow[d, Rightarrow] & \widetilde{N} \arrow[d, Rightarrow] \\
\widetilde{M'} \arrow[r, "\widetilde{\varphi'}"'] & \widetilde{N'}
\end{tikzcd}$$

por lo que $\widetilde{\varphi}$ y $\widetilde{\varphi'}$ son equivalentes, luego la aplicación $[\varphi] \mapsto [\widetilde{\varphi}]$ está bien definida. Por otro lado, las igualdades

$$[\widetilde{\varphi \circ \varphi'}] = [\widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\varphi'}] = [\widetilde{\varphi}] \circ [\widetilde{\varphi'}]\,,$$

$$[\widetilde{\mathrm{id}_M}] = [\mathrm{id}_{\widetilde{M}}] = \mathrm{id}_{[\widetilde{M}]}\,,$$

muestran que la correspondencia $[M] \mapsto [\widetilde{M}]$ es un funtor de $\mathbf{ModGrcf}(S)/\approx$ en $\mathfrak{Coh}(X)/\cong$.

Veamos a continuación que este funtor es plenamente fiel, esto es, si M y N dos S-módulos graduados de tipo casi finito, debemos ver que la aplicación $\theta\colon \operatorname{Hom}([M],[N]) \to \operatorname{Hom}([\widetilde{M}],[\widetilde{N}])$ dado por $[\varphi] \mapsto [\widetilde{\varphi}]$ es biyectiva.

1) θ es inyectiva. En efecto, sean $\varphi\colon M \to N$ y $\varphi'\colon M' \to N'$ dos homomorfismos de S-módulos graduados de tipo casi finito tal que $\widetilde{\varphi}$ y $\widetilde{\varphi'}$ son equivalentes. Entonces existen isomorfismos $\widetilde{M} \xrightarrow{\sim} \widetilde{M'}$ y $\widetilde{N} \xrightarrow{\sim} \widetilde{N'}$ tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{M} \arrow[r, "\widetilde{\varphi}"] \arrow[d, Rightarrow] & \widetilde{N} \arrow[d, Rightarrow] \\
\widetilde{M'} \arrow[r, "\widetilde{\varphi'}"'] & \widetilde{N'}
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Aplicando el funtor Γ_*, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_*(\widetilde{M}) \arrow[r, "\Gamma_*(\widetilde{\varphi})"] \arrow[d, Rightarrow] & \Gamma_*(\widetilde{N}) \arrow[d, Rightarrow] \\
\Gamma_*(\widetilde{M'}) \arrow[r, "\Gamma_*(\widetilde{\varphi'})"'] & \Gamma_*(\widetilde{N'})
\end{tikzcd} \tag{4.4.14}$$

Por el Corolario 4.4.30, existen enteros $d_i \geq 0$, para $i = 1, \ldots, 4$, tal que se tienen los isomorfismos $M\{d_1\} \cong \Gamma_*(\widetilde{M})\{d_1\}$, $M\{d_2\} \cong \Gamma_*(\widetilde{M})\{d_2\}$, $M\{d_3\} \cong \Gamma_*(\widetilde{M})\{d_3\}$ y $M\{d_4\} \cong \Gamma_*(\widetilde{M})\{d_4\}$. Si tomamos $d = max\{d_i\}$, tenemos los diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd}
M\{d\} \arrow[r, "\varphi\{d\}"] \arrow[d, Rightarrow] & N\{d\} \arrow[d, Rightarrow] \\
\Gamma_*(\widetilde{M})\{d\} \arrow[r, "\Gamma_*(\widetilde{\varphi})\{d\}"'] & \Gamma_*(\widetilde{N})\{d\}
\end{tikzcd} \tag{4.4.15}$$

$$\begin{tikzcd}
M'\{d\} \arrow[r, "\varphi'\{d\}"] \arrow[d, Rightarrow] & N'\{d\} \arrow[d, Rightarrow] \\
\Gamma_*(\widetilde{M'})\{d\} \arrow[r, "\Gamma_*(\widetilde{\varphi'})\{d\}"'] & \Gamma_*(\widetilde{N'})\{d\}
\end{tikzcd} \tag{4.4.16}$$

Si aplicamos el funtor $-\{d\}$ al diagrama (4.4.14) y luego lo juntamos con los diagramas (4.4.15) y (4.4.16), obtenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M\{d\} \arrow[r, "\varphi\{d\}"] \arrow[d, Rightarrow] & N\{d\} \arrow[d, Rightarrow] \\ M'\{d\} \arrow[r, "\varphi'\{d\}"'] & N'\{d\} \end{tikzcd}$$

así los homomorfismos φ y φ' son equivalentes.

2) θ es sobreyectiva. En efecto, si damos un morfismo $f\colon \widetilde{M} \to \widetilde{N}$ y consideramos el homomorfismo graduado $\Gamma_*(f)\colon \Gamma_*(\widetilde{M}) \to \Gamma_*(\widetilde{N})$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \Gamma_*(\widetilde{M})^\sim \arrow[r, "\Gamma_*(f)^\sim"] \arrow[d, Rightarrow, "\beta_{\widetilde{M}}"'] & \Gamma_*(\widetilde{N})^\sim \arrow[d, Rightarrow, "\beta_{\widetilde{N}}"] \\ \widetilde{M} \arrow[r, "f"'] & \widetilde{N} \end{tikzcd}$$

donde los isomorfismos $\beta_{\widetilde{M}}$ y $\beta_{\widetilde{N}}$ se deben a la Proposición 4.4.12. Así $\Gamma_*(f)^\sim$ y f son equivalentes, lo que prueba la sobreyectividad. Finalmente, si $\mathcal{F}$ es un haz coherente sobre X, sabemos que $\Gamma_*(\mathcal{F})$ es un S-módulo de tipo casi finito, luego del isomorfismo $\beta_{\mathcal{F}}\colon \Gamma_*(\mathcal{F})^\sim \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$ (dado por la Proposición 4.4.12), tenemos $[\Gamma_*(\mathcal{F})^\sim] = [\mathcal{F}]$. Esto prueba que el funtor inducido por $^\sim$, es esencialmente sobreyectiva. Por el Teorema 2.1.10, se tiene la equivalencia de categorías requerida. $\square$

A continuación S denotará el anillo de los polinomios $A[x_0, \dots, x_r]$, donde A es un anillo, y X denotará a Proj S.

Definición 4.4.8. Para un ideal homogéneo I de S, definimos la *saturación* de I como el ideal

$$\overline{I} = \{s \in S \mid \text{existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } x_i^n s \in I \text{ para todo } i = 0, \dots, r\}$$

Diremos que I es un ideal *saturado* si $\overline{I} = I$.

Ejemplo 4.4.33. La saturación del ideal $\langle x^3, x^2y, xz, xw\rangle$ en $A[x, y, z, w]$ es el ideal $\langle x\rangle$.

Observación 4.4.9. La saturación del ideal I (de la definición anterior) es un ideal homogéneo. En efecto, si $s = s_0 + s_1 + \ldots + s_n \in \overline{I}$, con $s_j \in S_j$ para todo j. Entonces existe un entero $m \geq 0$ tal que para $x_i^m s = x_i^m s_0 + x_i^m s_1 + \ldots + x_i^m s_n \in I$ para todo $i = 0, \dots, r$, y como I es un ideal homogéneo, $x_i^m s_j \in I$ para todo i, j, luego $s_j \in \overline{I}$ para todo $j = 0, \dots, n$.

Observación 4.4.10. La saturación de un ideal I es un ideal saturado, esto es, $\overline{\overline{I}} = \overline{I}$. En efecto, la inclusión $\overline{I} \subseteq \overline{\overline{I}}$ es evidente, veamos la otra inclusión. Sea $s \in \overline{\overline{I}}$, entonces existe un entero $m \geq 0$ tal que $x_i^m s \in \overline{I}$ para todo $i = 0, \ldots, r$. Luego, para cada i, existe un entero $n_i \geq 0$ tal que $x_j^{n_i} x_i^m s \in I$ para todo $j = 0, \ldots, r$. Si tomamos $N = m + max\{n_i\}_{i=0}^{i=r}$, tenemos $x_j^N s \in I$ para todo $j = 0, \ldots, r$, por tanto $s \in \overline{I}$.

Proposición 4.4.34. *Sean I un ideal homogéneo de S y $X = \operatorname{Proj} S$. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(a) $\operatorname{Proj} S/I \cong \operatorname{Proj} S/\overline{I}$.

(b) *Si $Y = \operatorname{Proj} S/I$, entonces $\Gamma_*(\mathcal{J}_Y) = \overline{I}$; en particular $\Gamma_*(\mathcal{J}_Y)$ es un ideal saturado.*

Demostración.(a) Sea $J = \overline{I}$. Consideremos el epimorfismo canónico $\varphi \colon S/I \to S/J$ dado por $\overline{s} \mapsto \widehat{s}$ (donde $\widehat{s}$ denota la clase en S/J). Por la Proposición 3.5.1, φ induce un morfismo $(f, f^\sharp)\colon \operatorname{Proj} S/J \to \operatorname{Proj} S/I$ dado por $f(\mathfrak{p}/J) := \varphi^{-1}(\mathfrak{p}/J) = \mathfrak{p}/I$. Para mostrar que f es un homeomorfismo, debemos probar que si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} S$, $\mathfrak{p}/J \in \operatorname{Proj} S/J$ si y sólo si $\mathfrak{p}/J \in \operatorname{Proj} S/J$, esto es equivalente a que $V_+(I) = V_+(J)$. Verifiquemos esta igualdad. Como $I \subseteq J$ tenemos $V_+(J) \subseteq V_+(I)$. Recíprocamente, si $\mathfrak{p} \in V_+(I)$, entonces $x_i \notin \mathfrak{p}$ para algún $i \in \{0, \ldots, r\}$. Tomemos ahora un elemento $s \in J$, entonces existe un entero $n \geq 0$ tal que $x_i^n s \in I$, luego, como $I \subseteq \mathfrak{p}$ y $x_i \notin \mathfrak{p}$, tenemos que $s \in \mathfrak{p}$; esto muestra que $J \subseteq \mathfrak{p}$, osea $\mathfrak{p} \in V_+(J)$; así $V_+(I) \subseteq V_+(J)$. De esta manera f es un homeomorfismo.

Para probar que $f^\sharp$ es un isomorfismo, es suficiente probar que si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} S$, el epimorfismo inducido $(S/I)_{(\mathfrak{p}/I)} \to (S/J)_{(\mathfrak{p}/J)}$ dado por $\frac{\overline{s}}{\overline{\lambda}} \mapsto \frac{\widehat{s}}{\widehat{\lambda}}$, es un isomorfismo. En efecto, si $\frac{\widehat{s}}{\widehat{\lambda}} = 0$, entonces existe $\beta \in S \backslash \mathfrak{p}$ tal que $\beta s \in J = \overline{I}$, luego existe un entero $n \geq 0$, tal que $x_0^n \beta s, \ldots, x_r^n \beta s \in I$. Por otro lado, como $S_+ \nsubseteq \mathfrak{p}$, existe $i \in \{0, \ldots, r\}$ tal que $x_i \notin \mathfrak{p}$, entonces tenemos $x_i^n \beta s \in I$ con $x_i^n \beta \notin \mathfrak{p}$, esto implica que $\frac{\overline{s}}{\overline{\lambda}} = 0$ en $(S/I)_{(\mathfrak{p}/I)}$.

(b) Como $\mathcal{J}_Y = \widetilde{I}$, tenemos el homomorfismo graduado $\alpha_I \colon I \to \Gamma_*(\mathcal{J}_Y)$. Este homomorfismo es inyectivo, para ello $\alpha_{I,n}$ debe ser inyectivo para todo $n \geq 0$, mas esto resulta inmediato desde que los elementos x_i no son divisores de cero en S (considere la prueba de la inyectividad del homomorfismo $\alpha_n \colon S \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ en la demostración del Corolario 4.4.6). Luego podemos considerar a I como un ideal contenido en $\Gamma_*(\mathcal{J}_Y)$. Veamos que $\Gamma_*(\mathcal{J}_Y)$ es la saturación de I. Dado un elemento $s \in \overline{I}$ homogéneo de grado d, entonces existe un entero $N \geq 0$ tal que $x_i^N s \in I$ para todo $i = 0, \ldots, r$, entonces $\frac{s}{1} = \frac{x_i^N s}{x_i^N} \in I(d)_{(x_i)}$. Identificando a $I(d)_{(x_i)}$ con $\Gamma(D_+(x_i), \mathcal{J}_Y(d))$ y considerando a s como un elemento de $\Gamma(X, \mathcal{J}_Y(d))$, tenemos de la igualdad anterior que $s|_{D_+(x_i)} \in \Gamma(D_+(x_i), \mathcal{J}_Y(d))$ para todo i, de donde se sigue que $s \in \Gamma(X, \mathcal{J}_Y(d))$. Esto prueba que $\overline{I} \subseteq \Gamma_*(\mathcal{J}_Y)$. Recíprocamente, consideremos $s \in \Gamma(X, \mathcal{J}_Y(d))$ y fijemos $i \in \{0, \ldots, r\}$, entonces la restricción de s en $D_(x_i)$ está en $I_{(x_i)}$, así $\frac{s}{1} = \frac{s_i}{x_i^N}$ con $s_i \in I$ y como los elementos x_i no son divisores de cero tenemos $s_i = x_i^N s$, por tanto $x_i^N f \in I$ para cada índice i, así tenemos que $s \in \overline{I}$. □

El Corolario 4.4.13 (a), nos dice que, todo subesquema cerrado de $\operatorname{Proj} S = \mathbf{P}_A^r$ es isomorfo a $\operatorname{Proj} S/I$ donde I es un ideal homogéneo de S. Luego por la proposición anterior, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 4.4.35. *Existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de ideales saturados de $S = A[x_0, \ldots, x_r]$ y el conjunto de subesquemas cerrados de X módulo isomorfismos.*

Capítulo 5

Versión Cohomológica del Teorema de Serre

En este capítulo expondremos la version cohomológica de la correspondencia proyectiva de Serre entre los haces coherentes sobre un esquema proyectivo y los módulos graduados de tipo casi finito (Teorema 4.4.32), ver Teorema 5.2.8.

5.1 Cohomología de Haces Coherentes

Definición 5.1.1. Una *categoría abeliana* es una categoría $\mathfrak{U}$ tal que para cada par $A, B \in$ $\mathbf{Ob}(\mathfrak{U})$, el conjunto $\operatorname{Hom}(A, B)$ tiene estructura de grupo abeliano, y la ley de composición es lineal; existen las sumas directas finitas; todo morfismo tiene un núcleo y un conúcleo; todo monomorfismo es el núcleo de su conúcleo, todo epimorfismo es el conúcleo de su núcleo; y finalmente, todo morfismo puede ser factorizado en un epimorfismo seguido de un monomorfismo.

Ejemplo 5.1.1. Las siguientes categorías son categorías abelianas: La categoría de los grupos abelianos $\mathbf{Ab}$, la categoría $\mathbf{Mod}(A)$ de los módulos sobre un anillo A .

Definición 5.1.2. Una *cocadena compleja* en una categoría abeliana $\mathfrak{U}$, es una colección de objetos $A^\bullet = \{A^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ junto con morfismos $d^i\colon A^i \to A^{i+1}$ satisfaciendo $d^{i+1} \circ d^i = 0$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Escribimos una cocadena compleja como una cadena ascendente

$$\cdots \longrightarrow A^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} A^i \xrightarrow{d^i} A^{i+1} \longrightarrow \cdots .$$

Los morfismos d^i son llamados *operadores cobordantes.* El objeto $H^i(A^\bullet) = \operatorname{Nuc}(d^i)/\operatorname{Im}(d^i)$ es llamado *i-ésimo objeto de cohomología* para la cocadena compleja $A^\bullet$. Un *morfismo* de cocadenas complejas $f\colon A^\bullet \to B^\bullet$ es un conjunto de morfismos $f^i\colon A^i \to B^i$ satisfaciendo $f^{i+1} \circ d^i = d^i \circ f^i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Es decir, se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A^{i-1} \arrow[r, "d^{i-1}"] \arrow[d] & A^i \arrow[r, "d^i"] \arrow[d] & A^{i+1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B^{i-1} \arrow[r, "d^{i-1}"'] & B^i \arrow[r, "d^i"'] & B^{i+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Si $f\colon A^\bullet \to B^\bullet$ es un morfismo de complejos, entonces f induce una aplicación $H^i(f)\colon H^i(A^\bullet) \to H^i(B^\bullet)$. Si $0 \to A^\bullet \to B^\bullet \to C^\bullet \to 0$ es una sucesión exacta de complejos, entonces existen aplicaciones $\delta^i\colon H^i(C^\bullet) \to H^{i+1}(A^\bullet)$ que nos da una sucesión exacta

$$\cdots \to H^i(A^\bullet) \to H^i(B^\bullet) \to H^i(C^\bullet) \xrightarrow{\delta^i} H^{i+1}(A^\bullet) \to \cdots$$

Una *homotopía* $\Sigma\colon f \to g$ entre dos morfismos de cocadenas $f, g\colon A^\bullet \to B^\bullet$ es una colección de morfismos $\Sigma^i\colon A^i \to B^{i-1}$ tal que $g - f = d \circ \Sigma + \Sigma \circ d$; es decir

$$g^i - f^i = d^{i-1} \circ \Sigma^i + \Sigma^{i+1} \circ d^i \quad \text{para todo} \quad i \in \mathbb{Z}$$

como nos muestra el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A^{i-1} \arrow[r, "d^{i-1}"] \arrow[d] & A^i \arrow[r, "d^i"] \arrow[dl, "\Sigma^i"'] \arrow[d, bend right] \arrow[d, bend left] & A^{i+1} \arrow[r] \arrow[dl, "\Sigma^{i+1}"'] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B^{i-1} \arrow[r, "d^{i-1}"'] & B^i \arrow[r, "d^i"'] & B^{i+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Decimos que f, g son *homotópicos* y escribimos $f \sim g$ si existe una homotopía $\Sigma\colon f \to g$. Si $f, g\colon A^\bullet \to B^\bullet$ son dos morfismos homotópicos de cocadenas, entonces $H^i(f) \cong H^i(g)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana. Decimos que $\mathcal{A}$ tiene *suficientes inyectivos* si para todo objeto A, existe un objeto inyectivo I_0 y un monomorfismo $A \to I_0$. Si $\mathcal{A}$ tiene suficientes inyectivos, es claro que podemos construir una resolución inyectiva de cualquier objeto A.

En lo que sigue vamos a considerar una categoría abeliana $\mathcal{A}$ con suficientes inyectivos y $\mathcal{B}$ cualquier otra categoría. Sea $T\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtor covariante aditivo y tomemos una resolución inyectiva de A

$$I\colon \quad 0 \longrightarrow A \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow \cdots$$

esto nos da una cocadena compleja de objetos de $\mathcal{B}$

$$TI\colon \quad 0 \longrightarrow T(I^0) \longrightarrow T(I^1) \longrightarrow \cdots \longrightarrow T(I^n) \longrightarrow \cdots$$

Definimos $R^n_I T(A) := H^n(TI)$ para $n \geq 0$. Sea B otro objeto con resolución inyectiva J y sea $\alpha\colon A \to B$ un morfismo, entonces existe un morfismo de cadenas $\varphi\colon I \to J$ que hace conmutativo el siguiente diagrama con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & I^0 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_0"] & I^1 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_1"] & \ldots \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] & J^0 \arrow[r] & J^1 \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Para $n \geq 0$ existe un morfismo $H^n(T(\varphi))\colon R^n_I T(A) \to R^n_J T(B)$ que depende solo de α pero no de φ.

Denotemos por $\mathfrak{Ab}(X)$ a la categoría de los grupos abelianos sobre un espacio topológico X.

Definición 5.1.3. Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado y sea $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Fijemos una resolución inyectiva $\mathcal{J}$ a los objetos de $\mathfrak{Ab}(X)$. Entonces para cualquier haz de $\mathcal{O}_X$-módulos $\mathcal{F}$ y $i \geq 0$, los grupos de cohomología $H^i(X, \mathcal{F})$ tienen estructura de A-módulo. Para $i = 0$ esta es la estructura de A-módulo inducida por $H^0(X, \mathcal{F}) \cong \Gamma(X, \mathcal{F})$. Si $\phi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es un morfismo de haces de módulos, entonces $H^i(X, \mathcal{F}) \to H^i(X, \mathcal{G})$ es un morfismo de A-módulos; así que tenemos un funtor aditivo $H^i(X, -)\colon \mathfrak{Mod}(X) \to \mathbf{Mod}(A)$. Dada una sucesión exacta de haces de módulos

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

el morfismo de enlace $\delta^i\colon H^i(X, \mathcal{F}'') \to H^{i+1}(X, \mathcal{F}')$ es un morfismo de A-módulos para $i \geq 0$. De esta manera tenemos una sucesión exacta de A-módulos

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}') \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}'') \longrightarrow H^1(X, \mathcal{F}') \to \cdots$$

Observación 5.1.1. Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado y sea $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Sea $\mathcal{F}$ un haz de módulos en X y fijemos una resolución inyectiva $\mathcal{J}$ de los objetos de $\mathfrak{Ab}(X)$. Para calcular la estructura de A-módulo en el grupo abeliano $H^i(X, \mathcal{F})$ procedemos de la siguiente manera: elegimos cualquier resolución inyectiva de $\mathcal{F}$ en $\mathfrak{Mod}(X)$

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{J}^0 \longrightarrow \mathcal{J}^1 \longrightarrow \mathcal{J}^2 \longrightarrow \cdots$$

y notemos que esta resolución es flasco en $\mathfrak{Ab}(X)$. Supongamos que la resolución inyectiva para $\mathcal{F}$ en $\mathfrak{Ab}(X)$ es

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{J}^0 \longrightarrow \mathcal{J}^1 \longrightarrow \mathcal{J}^2 \longrightarrow \cdots$$

Entonces la identidad $id_{\mathcal{J}}$ induce un morfismo de cocadenas complejas $\mathcal{J} \to \mathcal{J}$ en $\mathfrak{Ab}(X)$. Aplicando el funtor $\Gamma(X, -)\colon \mathfrak{Ab}(X) \to \mathbf{Ab}$ y tomando cohomología en i obtenemos un isomorfismo de grupos abelianos $H^i_A(X, \mathcal{F}) \to H^i(X, \mathcal{F})$ el cual induce la estructura de A-módulo en $H^i(X, \mathcal{F})$. Si fijamos una resolución inyectiva $\mathcal{I}$ a los objetos de $\mathfrak{Mod}(X)$, entonces estos isomorfismos definen una equivalencia natural $H^i_A(X, -) \cong H^i(X, -)$ de funtores $\mathfrak{Mod}(X) \to A\mathbf{Mod}$.

Observación 5.1.2. Utilicemos las notaciones de la observación anterior para describir la estructura de A-módulo. Cualquier $a \in A$ nos da un endomorfismo de haces de grupos abelianos $a\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ el cual induce un morfismo de grupos abelianos $A\colon H^i(X, \mathcal{F}) \to H^i(X, \mathcal{F})$. A partir de la observación anterior podemos concluir que $A(x) = a.x$, así que este endomorfismo nos da también la estructura de A-módulo en $H^i(X, \mathcal{F})$.

Lema 5.1.2. *Sea Y un subconjunto cerrado de un espacio topológico X con inclusión $j\colon Y \to X$, y sea $\mathcal{F}$ un un haz de grupos abelianos en Y. Entonces para $i \geq 0$ existe un isomorfismo canónico de grupos abelianos $H^i(Y, \mathcal{F}) \cong H^i(X, j_*\mathcal{F})$.*

Demostración. Ver [6] o [11]. □

Observación 5.1.3. Si $j\colon Y \to X$ es una inmersión cerrada de esquemas sobre un esquema afín Spec A, entonces de la Observación 5.1.2 vemos que el isomorfismo $H^i(Y, \mathcal{F}) \cong H^i(X, j_*\mathcal{F})$ es un isomorfismo de A-módulos para cualquier haz de módulos $\mathcal{F}$ en Y.

A continuación daremos la definición de cohomología de Cech.

Definición 5.1.4. Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{F}$ un haz de grupos abelianos sobre X. Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto y finito de X indexado por el conjunto ordenado $I = \{0, 1, .., n\}$. Denotamos las intersecciones $U_{ij} = U_i \cap U_j, \ldots, U_{i_0\cdots i_p} = U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p}$. Definimos ahora un complejo de grupos abelianos $C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ como sigue. Para cada $p = 0, \ldots, n$, definimos

$$C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \prod_{i_0<\cdots<i_p} \mathcal{F}(U_{i_0\cdots i_p})\,.$$

Si $p > n$, definimos $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$.

Definimos la diferencial $d^{p+1} \colon C^p \to C^{p+1}$ por la fórmula

$$(d^{p+1}s)_{i_0\cdots i_{p+1}} := \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k s_{i_0\cdots \widehat{i_k}\cdots i_{p+1}}|_{U_{i_0\cdots i_{p+1}}},$$

donde el símbolo $\widehat{i_k}$ significa que omitimos el índice i_k.

Si $p \geq 0$ se cumple que $d^{p+1} \circ d^p = 0$. Así $C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ es un complejo, que es llamado el *complejo de Cech* de $\mathcal{F}$ relativo al cubrimiento $\mathcal{U}$ y es denotado por $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Teorema 5.1.3. *Sea $\mathfrak{U}$ un cubrimiento finito no vacío de un esquema X dado por abiertos afines los cuales tienen intersecciones afines. Si $\mathcal{F}$ es un haz casi coherente en X, entonces*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to \mathcal{C}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to \cdots$$

es una resolución $\Gamma(X, -)$-acíclica de $\mathcal{F}$ por haces casi coherentes, y el morfismo canónico de $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$-módulos

$$\nu\colon \check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

es un isomorfismo para $p \geq 0$.

Demostración. Ver [6] o [11]. □

5.2 Versión Cohomológica del Teorema Principal

Teorema 5.2.1. *Sea A un anillo noetheriano no nulo y sea $X = \mathbb{P}^r_A$ para algún $r \geq 1$. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(a) *$H^i(X, \mathcal{O}(m)) = 0$ para $0 \leq i \leq r$ y todo $m \in \mathbb{Z}$.*

(b) *El A-módulo $H^r(X, \mathcal{O}(-m-r-1))$ es libre de rango $\binom{m+r}{r}$ para todo $m \geq 0$.*

(c) *Existe un isomorfismo canónico de A-módulos $H^r(X, \mathcal{O}(-r-1)) \cong A$.*

(d) *Existe un apareamiento perfecto de A-módulos libres de tipo finito para todo $m \in \mathbb{Z}$*

$$\tau\colon H^0(X, \mathcal{O}(m)) \times H^r(X, \mathcal{O}(-m-r-1)) \to A.$$

Demostración. Ver [6] o [11]. □

Corolario 5.2.2. *Sea A un anillo noetheriano no nulo y sea $X = \mathbb{P}^r_A$ para algún $r \geq 1$. Entonces para $i \geq 0$, $m \in \mathbb{Z}$ el A-módulo libre $H^i(X, \mathcal{O}(m))$ es cero salvo los casos $i = 0$ o $i = r$. En estos casos tenemos para $m \geq 0$ que*

$$rang_A H^0(X, \mathcal{O}(m)) = rang_A H^r(X, \mathcal{O}(-m-r-1)) = \binom{m+r}{r}$$

con $H^0(X, \mathcal{O}(m)) = H^r(X, \mathcal{O}(-m-r-1)) = 0$ para $m < 0$. En particular, $H^i(X, \mathcal{O}) = 0$ para $i > 0$.

Observación 5.2.1. Del corolario anterior tenemos para $i \geq 0$ y $m \in \mathbb{Z}$ que el A-módulo $H^i(X, \mathcal{O}(m))$ es finitamente generado. También, existe $N > 0$ tal que para cualquier $i > 0$ y $n \geq N$ tenemos que $H^i(X, \mathcal{O}(n)) = 0$.

Teorema 5.2.3 (Vanishing de Serre)**.** *Sea X un esquema proyectivo sobre un anillo noetheriano A, y sea $\mathcal{O}_X(1)$ un haz amplio e inversible en X sobre* Spec A. *Dado un haz coherente $\mathcal{F}$ sobre X, se cumplen:*

(a) *Para cada $i \geq 0$, $H^i(X, \mathcal{F})$ es un A-módulo finitamente generado.*

(b) *Existe un entero N, dependiendo de $\mathcal{F}$, tal que para cada $i > 0$ y cada $n \geq N$, $H^i(X, \mathcal{F}(n)) = 0$.*

Demostración. Desde que $\mathcal{O}(1)$ es un haz totalmente amplio en X sobre Spec A, entonces existe una inmersión $\imath \colon X \to \mathbb{P}^r_A$ de A-esquemas para $r \geq 1$, tal que $\mathcal{O}(1) \cong i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r_A}(1)$. Si $\mathcal{F}$ es coherente en X, entonces $i_*\mathcal{F}$ es coherente en $\mathbb{P}^r_A$ y por la Observación 5.1.3 los grupos de cohomología son los mismos. Por el Lema 4.4.18 tenemos un isomorfismo para $n > 0$

$$i_*(\mathcal{F}(n)) = i_*(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}(1)^{\otimes n}) \cong i_*\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r_A}(n) = (i_*\mathcal{F})(n)$$

así que reducimos la prueba al caso $X = \mathbb{P}^r_A$. De acuerdo a la observación anterior, las afirmaciones (a) y (b) son verdaderas para cualquier haz de la forma $\mathcal{O}(q)$ con $q \in \mathbb{Z}$ y lo mismo se cumple para sumas directas finitas de tales haces.

Veamos ahora la prueba de (a) para haces coherentes arbitrarios y para ello usaremos inducción sobre i. Para $i > r$, el Teorema 5.1.3 nos dice que $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$, y desde que X puede ser cubierto por $r + 1$ abiertos afines, el resultado es fácilmente verificado.

En general, para un haz coherente $\mathcal{F}$ en X, debido al Corolario 4.4.20 podemos escribir $\mathcal{F}$ como el cociente de un haz $\mathcal{E}$ el cual es una suma directa finita de haces $\mathcal{O}(q_i)$. Por tanto, tenemos una sucesión exacta corta de haces coherentes

$$0 \longrightarrow \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0 \tag{5.2.1}$$

que a su vez nos da una sucesión exacta de A-módulos

$$\cdots \longrightarrow H^i(X, \mathcal{E}) \longrightarrow H^i(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^{i+1}(X, \mathcal{R}) \longrightarrow \cdots$$

Ahora bien, el módulo $H^i(X, \mathcal{E})$ es finitamente generado porque $\mathcal{E}$ es una suma de los haces $\mathcal{O}(q_i)$; el módulo $H^{i+1}(X, \mathcal{R})$ es también finitamente generado debido a nuestra hipótesis inductiva. Desde que A es noetheriano concluimos que $H^i(X, \mathcal{F})$ es un A-módulo finitamente generado y esto prueba la primera afirmación.

Para la parte (b) solo utilizaremos un número finito de enteros $0 < i \leq r$, entonces es suficiente mostrar que para un entero fijo i, existe $N > 0$ tal que $H^i(X, \mathcal{F}(n)) = 0$ para todo $n \geq N$, y nuevamente por inducción comenzamos con $i = r$. Dado $n > 0$ podemos torcer (5.2.1) y llegamos a la sucesión exacta

$$\cdots \longrightarrow H^i(X, \mathcal{E}(n)) \longrightarrow H^i(X, \mathcal{F}(n)) \longrightarrow H^{i+1}(X, \mathcal{R}(n)) \longrightarrow \cdots$$

Para n suficientemente grande, el módulo $H^i(X, \mathcal{E}(n)) = 0$ ya que (b) es verdad para $\mathcal{E}$, y el módulo $H^{i+1}(X, \mathcal{R}(n)) = 0$ por hipótesis inductiva. Por lo tanto, $H^i(X, \mathcal{F}(n)) = 0$ para n suficientemente grande y esto completa la prueba. □

Corolario 5.2.4. *Sea k un cuerpo, f un polinomio homogéneo en $k[x_0, \ldots, x_r]$ con $d = \partial(f)$ y sea $V = V_+(f)$. Entonces*

$$dim_k\, H^i(V, \mathcal{O}_V(n)) = dim_k\, H^0(V, \mathcal{O}_V(r - 1 + d - n))\,.$$

□

En el Teorema 4.4.32 del capítulo anterior, hemos establecido una equivalencia de categorías entre $\mathbf{ModGrcf}(S)/\approx$ y $\mathfrak{Coh}(X)/\cong$ inducido por los funtores $\sim$ y Γ_*, en donde el anillo S era un S_0-álgebra finitamente generado por S_1 y S_0 era una k-álgebra finitamente generado. A continuación mostraremos este resultado con las mismas hipótesis, salvo la condición de que S_0 sea una k-álgebra finitamente generado, en este caso sólo requerimos que S_0 un anillo noetheriano finitamente generado.

En lo que sigue, S es un anillo graduado de la forma $S = S_0[S_1]$ finitamente generado por S_1 como S_0-álgebra con S_0 noetheriano, y $X = \operatorname{Proj} S$.

Lema 5.2.5. *Si la sucesión de $\mathcal{O}_X$-módulos coherentes*

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$$

es exacta, entonces existe un entero $N > 0$ tal que la sucesión

$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}'(n)) \to \Gamma(X, \mathcal{F}(n)) \to \Gamma(X, \mathcal{F}''(n)) \to 0$$

es exacta para todo $n > N$.

Demostración. Por el Corolario 4.4.13 (b), X es un esquema proyectivo sobre S_0, luego por el teorema anterior existe un entero N tal que $H^1(X, \mathcal{F}'(n)) = 0$ para todo $n > N$. Por otra parte, si $n \in \mathbb{Z}$ la sucesión exacta corta

$$0 \to \mathcal{F}'(n) \to \mathcal{F}(n) \to \mathcal{F}''(n) \to 0$$

induce una sucesión exacta larga

$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}'(n)) \to \Gamma(X, \mathcal{F}(n)) \to \Gamma(X, \mathcal{F}''(n)) \to H^1(X, \mathcal{F}'(n)) \to \cdots\,,$$

Luego, si $n > N$ tenemos la sucesión exacta

$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}'(n)) \to \Gamma(X, \mathcal{F}(n)) \to \Gamma(X, \mathcal{F}''(n)) \to 0\,.$$

□

Proposición 5.2.6. *Si M un S-módulo graduado finitamente generado. Entonces existe un entero $d \geq 0$ para el cual el homomorfismo de grupos $\alpha_{M,n}\colon M_n \to \Gamma(X, \widetilde{M}(n))$ es biyectivo para todo $n \geq d$, o más concisamente, existe un entero $d \geq 0$ tal que el homomorfismo graduado $\alpha_M\{d\}\colon M\{d\} \to \Gamma_*(\widetilde{M})\{d\}$ es un isomorfismo.*

Demostración. Como M es un S-módulo graduado finitamente generado, por el Lema 2.2.10 existe un homomorfismo graduado sobreyectivo $L = \bigoplus_{i=1}^r S(l_i) \to M$. Sea K el núcleo de este homomorfismo, entonces tenemos la sucesión exacta de S-módulos graduados

$$0 \to K \to L \to M \to 0\,.$$

Como S es noetheriano, K es finitamente generado, luego tenemos la sucesión exacta de $\mathcal{O}_X$-módulos coherentes

$$0 \to \tilde{K} \to \tilde{L} \to \tilde{M} \to 0\,.$$

Del lema anterior, existe un entero N tal que si $n > N$ el homomorfismo inducido $\Gamma(X, \tilde{L}(n)) \to \Gamma(X, \tilde{M}(n))$ es sobreyectivo, luego tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
L_n \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{L,n}"'] & M_n \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{M,n}"'] & 0 \\
\Gamma(X, \tilde{M}(n)) \arrow[r] & \Gamma(X, \tilde{M}(n)) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Luego, para probar que $\alpha_{M,n}$ es un isomorfismo para n suficientemente grande, es suficiente probar que $\alpha_{L,n}$ es un isomorfismo para n suficientemente grande. Entonces el problema se reduce para el caso M libre, pero como $\Gamma(X, \cdot)$ conmuta con la suma directa finita, el problema se reduce al caso $M = S(l)$, $l \in \mathbb{Z}$; más aún, puesto que tenemos las igualdades $S(l)_n = S_{l+n}$ y $S(l)(n) = S(l+n)$ para $n \in \mathbb{Z}$, podemos asumir que $M = S$. Como S es un A-álgebra finitamente generado por S_1, donde $A = S_0$ que por hipótesis es un anillo noetheriano, entonces tenemos un homomorfismo de A-álgebras $R = A[x_0, \ldots, x_r] \to S$. Repitiendo el procedimiento anterior, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
R_n \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow, "\alpha_{R,n}"'] & S_n \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{S,n}"'] & 0 \\
\Gamma(X, \tilde{R}(n)) \arrow[r] & \Gamma(X, \tilde{S}(n)) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde el isomorfismo vertical izquierdo se debe al Corolario 4.4.6. De este diagrama tenemos que $\alpha_{S,n}$ es un isomorfismo para todo n suficientemente grande, y la prueba termina. $\square$

Proposición 5.2.7. *Si $\mathcal{F}$ es un haz coferente sobre X, entonces el S-módulo $\Gamma_*(\mathcal{F})$ es de tipo casi finito.*

Demostración. Por el Corolario 4.4.20 existe un morfismo sobreyectivo $\bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_X(l_i) \to \mathcal{F}$. Sea $\mathcal{K}$ el núcleo de este morfismo, entonces tenemos la sucesión exacta de $\mathcal{O}_X$-módulos coherentes

$$0 \to \mathcal{K} \to \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_X(l_i) \to \mathcal{F} \to 0\,,$$

y del lema anterior existe un entero $N > 0$ tal que para todo $n > N$, el homomorfismo de grupos

$$\bigoplus_{i=1}^{r} S(l_i + n) = \Gamma(X, \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_X(l_i + n)) \to \Gamma(X, \mathcal{F}(n))$$

es sobreyectivo. Como estos homomorfismos son las componentes del homomorfismo graduado $\bigoplus_{i=1}^{r} S(l_i)) = \Gamma_*(\bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_X(l_i)) \to \Gamma_*(\mathcal{F})$ y el módulo $\bigoplus_{i=1}^{r} S(l_i)$ es finitamente generado, entonces $\bigoplus_{n>N} \Gamma(X, \mathcal{F}(n))$ es finitamente generado, o sea $\Gamma_*(\mathcal{F})$ es de tipo casi finito. $\square$

Teorema 5.2.8 (Correspondencia proyectiva de Serre)**.** *Sea* $X = \operatorname{Proj} S$. *Los funtores* $\sim$ *y* Γ_* *inducen una equivalencia de categorías entre la categoría* **ModGrcf**$(S)/\approx$ *y* $\mathfrak{Coh}(X)/\cong$.

Demostración. Si M es un S-módulo graduado de tipo casi finito, por el Corolario 4.4.27, $\widetilde{M}$ es un haz coherente, y si $\mathcal{F}$ es un haz coherente sobre X, por la Proposición 5.2.7, $\Gamma_*(\mathcal{F})$ es un S-módulo graduado de tipo casi finito. Luego la prueba continúa como en la demostración del Teorema 4.4.32. $\square$

5.3 Comentarios Finales

En esta parte final, vamos a dar introducir el concepto de característica de Euler y el concepto de polinomio de Hilbert de un haz coherente sobre un esquema proyectivo. Estas nociones son muy importantes en geometría algebraica para el estudio y clasificación de curvas y superficies.

Si X un esquema proyectivo sobre un cuerpo k, y $\mathcal{F}$ un haz coherente sobre X, entonces por teorema de Serre, $H^i(X, \mathcal{F})$ es un k-espacio vectorial de dimensión finita, además existe un entero N, tal que $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ para todo $i > N$, esto nos permite la siguiente definición:

Definición 5.3.1 (Característica de Euler)**.** Definimos *característica de Euler* de $\mathcal{F}$ como

$$\chi(\mathcal{F}) := \sum_i (-1)^i dim_k H^i(X, \mathcal{F})\,.$$

Lema 5.3.1. *Sea* $\mathcal{C}$ *una categoría abeliana y sea* $\delta\colon \operatorname{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathbb{Z}$ *una función tal que* $\delta(X) = \delta(X') + \delta(X'')$ *para toda sucesión exacta*

$$0 \to X' \to X \to X'' \to 0 \quad en \quad \mathcal{C}\,.$$

Entonces se cumple que $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \delta(X_i) = 0$ *para toda sucesión exacta*

$$0 \to X_0 \xrightarrow{d_0} X_1 \xrightarrow{d_1} \cdots \xrightarrow{d_{n-1}} X_n \to 0 \quad en \quad \mathcal{C}\,.$$

Demostración. Usamos inducción sobre n. Si $n = 2$ el resultado es inmediato por la propiedad de δ. Supongamos que $n \geq 3$; consideremos las siguientes sucesiones exactas

$$0 \to \text{Nuc } d_2 \to X_2 \to X_3 \to \cdots \to X_n \to 0\,, \tag{5.3.2}$$

$$0 \to X_0 \to X_1 \to \text{Im } d_1 \to 0\,. \tag{5.3.3}$$

Aplicando la hipótesis inductiva a (5.3.2), tenemos

$$\sum_{i=2}^{n}(-1)^i\delta(X_i) = \delta(\text{Nuc } d_2)\,.$$

Por otro lado, de (5.3.3) tenemos $\delta(X_1) = \delta(X_0) + \delta(\text{Im } d_1)$, y por la exactitud de esta sucesión, tenemos $\delta(\text{Nuc } d_2) = \delta(\text{Im } d_1)$. Luego juntando estas igualdades obtenemos $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\delta(X_i) = 0$. □

Proposición 5.3.2. *Sea X un esquema proyectivo sobre un cuerpo k. Si*

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$$

es una sucesión exacta corta de haces coherentes sobre X. Entonces

$$\chi(\mathcal{F}) = \chi(\mathcal{F}') + \chi(\mathcal{F}'')\,.$$

Demostración. Denotemos $h^i(X, \mathcal{F}) = dim_k H^i(X, \mathcal{F})$ para todo $i \geq 0$. La sucesión exacta corta dada en la hipótesis, induce una sucesión exacta larga

$$\cdots \to H^i(X, \mathcal{F}) \to H^i(X, \mathcal{F}'') \to H^{i+1}(X, \mathcal{F}') \to H^{i+1}(X, \mathcal{F}) \to \cdots\,,$$

donde sólo un número finito de términos es no nulo y cada término es un k-espacio vectorial de dimensión finita (Teorema 5.2.3). Luego, si aplicamos el lema anterior a esta sucesión, considerando $\mathcal{C}$ la categoría de k-espacios vectoriales de dimensión finita y $\delta(X) = dim_k(X)$, tenemos

$$\begin{aligned}
0 &= h^0(X, \mathcal{F}') - h^0(X, \mathcal{F}) + h^0(X, \mathcal{F}'') - h^1(X, \mathcal{F}') + h^1(X, \mathcal{F}) - h^1(X, \mathcal{F}'') + \cdots \\
&= \sum_{i\geq 0}(-1)^i h^i(X, \mathcal{F}') - \sum_{i\geq 0}(-1)^i h^i(X, \mathcal{F}) + \sum_{i\geq 0}(-1)^i h^i(X, \mathcal{F}'') \\
&= \chi(\mathcal{F}') - \chi(\mathcal{F}) + \chi(\mathcal{F}'')\,,
\end{aligned}$$

como queríamos probar. □

Proposición 5.3.3. *Sea X un esquema proyectivo sobre un cuerpo k, $\mathcal{O}_X(1)$ un haz inversible muy amplio sobre X relativo a k, y sea $\mathcal{F}$ un haz coherente sobre X. Entonces,*

(a) *existe un polinomio $P_{\mathcal{F}}(z) \in \mathbb{Q}[z]$ tal que $\chi(\mathcal{F}(n)) = P(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

(b) *Si $X = \mathbf{P}_k^r$ y $M = \Gamma_*(\mathcal{F})$, el polinomio $P_{\mathcal{F}}(z)$ coincide con el polinomio de Hilbert de M de la definición 2.2.10.*

Demostración. (a). Sea $j\colon X \to \mathbf{P}_k^n$ una inmersión cerrada tal que $\mathcal{O}_X(1) \cong j^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^n})$, sea $S = k[x_0, .., x_r]$, de manera que $\mathbf{P}_k^r = \operatorname{Proj} S$ donde $S = k[x_0, \dots, x_r]$, y sea $\mathcal{F}$ un haz coherente sobre X.

Si $Sop(\mathcal{F}) = \emptyset$, tomamos $P_{\mathcal{F}} = 0$ y la prueba termina.

Sea $m = dim\, Sop(\mathcal{F})$. Si $n \geq 0$ entonces $Sop(\mathcal{F}) \neq \emptyset$, tomemos $i \in \{0, \dots, r\}$, tal que $Sop(\mathcal{F}) \cap D_+(x_i) \neq \emptyset$. Consideremos el homomorfismo graduado $S(-1) \to S$ dado por la multiplicación por x_i. Entonces el homomorfismo inducido $S(-1)_{(x_i)} \to S_{(x_i)}$ es un isomorfismo, luego tenemos el isomorfismo $(S(-1)_{(x_i)})^{\sim} \to (S_{(x_i)})^{\sim}$. Así tenemos un morfismo $\mathcal{O}_X(-1) \to \mathcal{O}_X$ tal que $\mathcal{O}_X(-1)|_{D_+(x_i)} \to \mathcal{O}_X|_{D_+(x_i)}$ es un isomorfismo. Tensorizando por $\mathcal{F}$ tenemos un morfismo $\mathcal{F}(-1) \to \mathcal{F}$ tal que $\mathcal{F}(-1)|_{D_+(x_i)} \to \mathcal{F}|_{D_+(x_i)}$ es un isomorfismo. Sean $\mathcal{R}$ y $\mathcal{Q}$ el núcleo y conúcleo respectivamente del morfismo $\mathcal{F}(-1)|_{D_+(x_i)}$, por la Proposición 4.3.2, $\mathcal{R}$ y $\mathcal{Q}$ son coherentes. Afirmamos que $Sop(\mathcal{R})$ y $Sop(\mathcal{Q})$ están contenidos en $Sop(\mathcal{F}) \cap V_+(x_i)$. En efecto, supongamos que $\mathfrak{p} \notin Sop(\mathcal{F}) \cap V_+(x_i)$, si $\mathfrak{p} \notin V_+(x_i)$ tenemos por el isomorfismo anterior que $\mathcal{F}(-1)_{\mathfrak{p}} \to \mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$ es un isomorfismo, de donde tenemos $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}} = 0$ y $\mathcal{Q}_{\mathfrak{p}} = 0$, si $\mathfrak{p} \notin Sop(\mathcal{F})$ entonces $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}} = 0$, entonces $\mathcal{Q}_{\mathfrak{p}} = 0$, por otro lado, de la igualdad $\mathcal{F}(-1) = \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(-1)$ se sigue que $\mathcal{F}(-1)_{\mathfrak{p}} = 0$, por tanto $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}} = 0$, con esto se sigue la afirmación. Por otro lado, puesto que $Sop(\mathcal{F}) \cap D_+(x_i) \neq \emptyset$ tenemos $Sop(\mathcal{F}) \cap V_+(x_i) \subsetneq Sop(\mathcal{F})$, luego $Sop(\mathcal{R}), Sop(\mathcal{Q}) \subsetneq Sop(\mathcal{F})$.

Procedamos por inducción sobre m. Si $m = 0$, el conjunto $Sop(\mathcal{F})$ consta de un sólo elemento, entonces $Sop(\mathcal{R}) = Sop(\mathcal{Q}) = \emptyset$, luego $P_{\mathcal{R}} = P_{\mathcal{R}} = 0$. Aplicando el Lema 5.3.1 a la sucesión exacta

$$0 \to \mathcal{R}(n) \to \mathcal{F}(n-1) \to \mathcal{F}(n) \to \mathcal{Q}(n) \to 0 \tag{5.3.4}$$

en $\mathcal{C} = \mathfrak{Coh}(X)$ con $\delta(\mathcal{F}) = \chi(\mathcal{F})$; tenemos

$$\chi(\mathcal{F}(n)) - \chi(\mathcal{F}(n-1)) = P_{\mathcal{R}}(n) - P_{\mathcal{R}}(n) = 0 - 0 = 0$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Luego, por la Proposición 2.2.18, existe un polinomio numérico $P \in \mathbb{Q}[z]$ tal que $\chi(\mathcal{F}(n)) = P(n)$ para todo n suficientemente grande. Puesto que $P(z) - P(z-1) = 0$ para infinitos valores de z, entonces $P(z) - P(z-1)$ es el polinomio nulo, luego por inducción descendente sobre n, tenemos $\chi(\mathcal{F}(n)) = P(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, por tanto tomamos $P_{\mathcal{F}} = P$.

Sea $m > 0$. Del resultado anterior tenemos que $Sop(\mathcal{R}), Sop(\mathcal{Q}) \subsetneq Sop(\mathcal{F})$, luego por la Proposición 2.3.15, $dim\, Sop(\mathcal{R})$ y $dim\, Sop(\mathcal{Q})$ son estrictamente menores que m, entonces por hipótesis inductiva existen polinomios $P_{\mathcal{R}}$, $P_{\mathcal{Q}} \in \mathbb{Q}$ tal que $\chi(\mathcal{R}(n)) = P_{\mathcal{R}}(n)$ y $\chi(\mathcal{Q}(n)) = P_{\mathcal{Q}}(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Como en el caso anterior, aplicamos el Lema 5.3.1 a la sucesión exacta (5.3.4), para tener la sucesión

$$\chi(\mathcal{F}(n)) - \chi(\mathcal{F}(n-1)) = P_{\mathcal{R}}(n) - P_{\mathcal{R}}(n)$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Por la Proposición 2.2.18, existe un polinomio numérico $P \in \mathbb{Q}[z]$ tal que $\chi(\mathcal{F}(n)) = P(n)$ para todo n suficientemente grande. Puesto que $P(z) - P(z-1) = P_{\mathcal{R}}(z) - P_{\mathcal{R}}(z)$ para infinitos valores de z, entonces tenemos la igualdad de polinomios $P(z) - P(z) = P_{\mathcal{R}}(z) - P_{\mathcal{R}}(z)$, luego por inducción descendente sobre n, obtenemos $\chi(\mathcal{F}(n)) = P(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, por tanto tomamos $P_{\mathcal{F}} = P$. De esta manera concluye la prueba.

(b). Por el Teorema 5.2.3 existe un entero N tal que, $H^i(X, \mathcal{F}(n)) = 0$ para todo $i \geq 1$ y $n > N$; por la Proposición 5.2.6, existe un entero d tal que $\alpha_{M,n}\colon M_n \to \Gamma(X, \mathcal{F}(n))$

es biyectiva para todo $n > d$, de donde $dim_k M_n = dim\,\Gamma(X, \mathcal{F}(n))$ para todo $n > d$. Entonces para todo n suficientemente grande tenemos

$$\varphi_M(n) := dim_k M_n = dim\, H^0(X, \mathcal{F}(n)) = \chi(\mathcal{F}(n)) = P_{\mathcal{F}}(n)$$

luego por el teorema de Hilbert-Serre (Teor. 2.2.19), se sigue que $P_{\mathcal{F}}$ es el polinomio de Hilbert de M. □

Definición 5.3.2 (Polinomio de Hilbert)**.** El polinomial $P_{\mathcal{F}}(z)$ de la proposición anterior es llamado el *polinomio de Hilbert* de $\mathcal{F}$ con respecto al haz $\mathcal{O}_X(1)$.

Ejemplo 5.3.4. Sea $X = \mathbf{P}^1_k$, $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ y $M = S$. Entonces $S = k[x_0, x_1]$ y $dim_k S_n = n+1$, así el polinomio de Hilbert de M es $P_M(z) = z + 1$. Calculando el polinomio de Hilbert en términos de la característica de Euler, tenemos

$$\chi(\mathcal{F}) = h^0(\mathcal{O}_X(n)) - h^1(\mathcal{O}_X(n)) = \begin{cases} (n+1) - 0 = n+1\,, & \text{si} \quad n \geq -1\,, \\ 0 - (-n-1) = n+1\,, & \text{si} \quad n \leq -2\,. \end{cases}$$

Así $P_{\mathcal{F}}(n) = n + 1$.

Definición 5.3.3 (Genero aritmético)**.** Sea X un esquema proyectivo de dimensión r sobre un cuerpo k. Definimos el *genero aritmético* p_a de X por

$$p_a(X) := (-1)^r(\chi(\mathcal{O}_X) - 1)\,.$$

Observación 5.3.1. El genero aritmético sólo depende de X y no de la inmersión cerrada de X en $\mathbf{P}^r_k$.

Ejemplo 5.3.5 (El genero de una curva plana de grado d)**.** Sea $C \subseteq \mathbf{P}^2_k$ una curva de grado d, es decir, $C = \operatorname{Proj} S/\langle f\rangle$, donde f es un polinomio homogéneo de grado d. Entonces

$$p_a(C) = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)\,.$$

En efecto, si $I = \langle f \rangle$, tenemos

$$1 - p_a = h^0(\mathcal{O}_C) - h^1(\mathcal{O}_C) + h^2(\mathcal{O}_C) = \chi(\mathcal{O}_C)\,.$$

Por otro lado, la sucesión exacta

$$0 \to S(-d) \xrightarrow{\cdot f} S \to S/\langle f\rangle \to 0\,,$$

donde $\cdot f$ simboliza el homomorfismo que resulta por la multiplicación con f, induce una sucesión exacta

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2_k}(-d) \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2_k} \to \mathcal{O}_C \to 0\,.$$

Luego, por la Proposición 5.3.2, tenemos $\chi(\mathcal{O}_C) = \chi(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2_k}) - \chi(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2_k}(-d))$. Pero

$$\chi(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2_k}) = h^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2_k}) - h^1(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2_k}) + h^2(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2_k}) = 1 - 0 + 0 = 1\,,$$

y

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2_k}(-d)) &= h^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2_k}(-d)) - h^1(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2_k}(-d)) + h^2(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2_k}(-d)) \\ &= 0 - 0 + \frac{1}{2}(d-1)(d-2)\,, \end{aligned}$$

donde para el último cálculo usamos el Corolario 5.2.4

$$h^2(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^2}(-d)) = h^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^2}(d-3)) = dim\, S_{d-3} = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)\,.$$

Luego $1 - p_a = \chi(\mathcal{O}_C) = 1 - \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$, así $p_a(C) = 1 - \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$, como se quería ver.

Bibliografía

[1] M.F. Atiyah and I.G. Macdonald, *Introduction to Conmutative Algebra.* Addison-Wesley, 1969.

[2] Bourbaki, *Algèbre Commutative*, Ch 1-4. Masson, 1985.

[3] W. Fulton, *Algebraic Curves.* Benjamin W.A, 1969.

[4] D. Eisenbud and J. Harris, *The Geometry of Schemes.* Springer, 2001.

[5] A. Grothendieck and J. Dieudonné, *Eléments de Géométrie Algébrique I,II.* Publications Mathématiques de l'I.H.E.S. 1961.

[6] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry.* Springer Verlag, 1977.

[7] J.-P. Lafon, *Les Formalismes Fondamentaux de l'Algèbre.* Hermann.

[8] S. Litaca, *Algebraic Geometry.* Springer Verlag, 1977.

[9] H. Matsumura, *Commutative Algebra* Benjamin INC, New York, 1970.

[10] D. Murfet, *Notas de Internet*, `http://therisingsea.org/`.

[11] G. Muñoz Marquez, *Cohomología del espacio proyectivo*, Tesis de Licenciatura, disponible en `http://cybertesis.unmsm.edu.pe/`.

[12] D. Perrin, *Algebraic Geometry. An Introduction.* Universitext. Springer, 2008.

[13] Qing Liu, *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves.* Oxford, 2002.

[14] P. Schapira, *Categories and Homological Algebra.* Notes of course. January, 2008.

[15] J.-P. Serre, *Faisceaux Algebriques Coherents.* The Annals of Mathematics, 1955.

[16] K. Ueno, *Algebraic Geometry 1,2,3.* American Mathematical Society.

[17] O. Zariski and P. Samuel, *Commutative Algebra 1,2.* Van Nostrand Company, 1965.